20/10/2011

2011-2012 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi
Diferansiyel Denklemler Çalışma Soruları

1) $y''=2y^3+8y$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2) a) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

b) $3yy''=5y'^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3) $y''+6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

4) $ty''+2y'+e^t y=0$ diferansiyel denkleminin Wronskian determinantını bulunuz. $W(y_1,y_2)(2)=3$ ise, $W(y_1,y_2)(4)$ değerini bulunuz.

5) $y''-7y'+10y=6t+8e^{2t}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

6) $y''+7y'+12y=\sin 2x+e^{-3x}+4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

7) $y''-5y'+4y=-4(x^2+1)e^{3x}$ verilen diferansiyel denklemin özel çözümünü bulunuz.

8) $x^2y''+xy'-4y=0$ denkleminin özel bir çözümü $y_1(x)=x^2$ *olduğuna göre, mertebe düşürme yöntemi ile lineer bağımsız ikinci çözümünü bulunuz.*

2011-2012

1) y''=$2y^3$+8y denkleminin genel çözümünü bulunuz

y''=f(y) tipi

y'=p , y''=p $\frac{dp}{dy}$ *konularak* $p\frac{dp}{dy} = 2y^3 + 8y$

pdp=$2y^3$+8y dy integra alınırsa

$$\frac{p^2}{2} = 2\frac{y^4}{4} + 8\frac{y^2}{2} + c = \frac{y^4}{2} + 4y^2 + c$$

$P^2=y^4+8y^2+c$ bulunur buradan da $p = \mp\sqrt{y^4 + 8y^2 + c}$ *elde edilir.* *y'=dy/dx= p idi.*

$x+c=\mp\int \frac{dy}{\sqrt{y^4+8y^2+c}}$ *genel çözüm bulunur.*

2)

a) $x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{x}$ $\qquad$ $y'' = f(x, y')$ tipi

$\frac{dy}{dx} = y' = p$ $\qquad$ $y'' = \frac{dp}{dx}$ ifadeleri dif. denklemde yerlerine konulursa

$\frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{x}$ $\qquad$ $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$

Hatırlatma: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left[\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]$

Lnx+lnc=ln(p+$\sqrt{1+p^2}$) $\rightarrow$ cx= p+$\sqrt{1+p^2}$ $\rightarrow$ cx-p= $\sqrt{1+p^2}$ 2 tarafın karesi alınırsa

$c^2x^2 - 2cxp + p^2 = 1 + p^2$ $\rightarrow$ $c^2x^2 - 1 = 2cxp$ $\rightarrow$ $p = \frac{c^2x^2-1}{2cx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}$

p=$\frac{dy}{dx}$ idi. $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}$ $\rightarrow$ $dy = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}dx$

$$\rightarrow \quad y = \frac{cx^2}{4} - \frac{\ln x}{2c} + c_1$$

2011-2012

b)

$3yy''=5y'^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$y''=f(y,y')$ tipi

$y'=p$, $y''=p\frac{dp}{dy}$ yazılarak

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{5}{3}\frac{p^2}{y}$$

$\frac{dy}{y}=\frac{3}{5}\frac{dp}{p}$ lny+lnc=ln(yc)=3/5 lnp=lnp$^{3/5}$ p$^{3/5}$ =cy p=cy$^{5/3}$

$y'=p$ idi $y'=$ cy$^{5/3}$ $\frac{dy}{y^{5/3}}=cdx$ $-\frac{3}{2}y^{-2/3}=cx+c_1$

3) $y''+6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

$y''=r^2$

$y'=r$ yazılarak $r^2+6=0$ karakteristik denklemden kompleks kök

$y=1$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=0$ $\beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\sqrt{6}$

$r_1=0+i\sqrt{6}$ $r_2=0-i\sqrt{6}$

$$\mathbf{y_h=e^{\alpha x}\,(c_2\mathrm{Cos}\beta x+c_3\mathrm{Sin}\beta x)}$$

$$\mathbf{y_h=(c_1\mathrm{Cos}\sqrt{6}\,x+c_2\mathrm{Sin}\sqrt{6}\,x)}$$

$W=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{6x} & \sin\sqrt{6x}\\ -\sqrt{6}\sin\sqrt{6x} & \sqrt{6}\cos\sqrt{6x}\end{pmatrix}=\sqrt{6}\neq 0$ çözümlerin temel cümlesidir.

4) $ty''+2y'+e^t y=0$ diferansiyel denkleminin Wronskian determinantını bulunuz. W(y_1,y_2)(2)=3 ise, W(y_1,y_2)(4) değerini bulunuz.

$ty''+2y'+e^t y=0$

$y''+\frac{2}{t}y'+\frac{e^t}{t}y=0$ **yazılarak** **Abel Teoreminden** **W=C e $^{\int -p(t)dt}$**

W=C e $^{\int -p(t)dt}$= Ce $^{\int -2/tdt}$=ce$^{-2\ln t}$=ct^{-2}=c/t^2

W(y_1,y_2)(2)=3 den 3=c/4 c=12 bulunur.

2011-2012

$$W(y_1,y_2)(4)=12/4^2=3/4$$

5) y"-7y'+10y=6t+8e^{2t} diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

önce denklem 0' a eşitlenerek homojen kısmın çözümü bulunur.

r^2-7r+10=0 karakteristik denklem

(r-2)(r-5)=0 r_1=2 , r_2=5 iki farklı reel kök

$$y_{homogen}= c_1e^{2t}+c_2e^{5t}$$

Eşitliğin sağ tarafı doğru denklemi ve üstel fonksiyonun toplamı olduğundan özel çözüm olarak doğru denklemi ve üstel fonksiyon için ayrı ayrı özel çözümler seçilir.

y"-7y'+10y=6t için;

***<u>0</u>** <u>karakteristik denklemin **kökü olmadığından**</u>*

$y_{özel1}$=At+B *seçilerek türevler(y' ve y'') alınır, verilen denklemde yerlerine konularak katsayılar hesaplanır.*

y'= A y''=0

-7 A+10(At+B)=6t 10At+10 B--7 A=6t

10At=6t= A= 6/10=3/5
10 B--7 A=0 B=21/50

$$y_{özel1}=3/5t+21/50$$

Verilen Üstel fonksiyonda (8e^{2t}) t nin katsayısı 2 karakteristik denklemin <u>basit bir kökü</u> olduğundan

$$y_{özel2}=tDe^{2t}$$

$y'=2tDe^{2t}+De^{2t}$

$y''=2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}$

$2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}-7(2tDe^{2t}+De^{2t})+10tDe^{2t}=8\ e^{2t}$
$4De^{2t}==8\ e^{2t}$
D=2

$$y_{özel2}=tDe^{2t}=2te^{2t}$$

2011-2012

genel çözüm;

$$y_{genel} = y_{homogen} + y_{özel}$$

$$y_{genel} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + 2te^{2t} + 3/5t + 21/50$$

6) $y'' + 7y' + 12y = \sin 2x + e^{-3x} + 4$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm:

$y'' + 7y' + 12y = 0$ **ile homojen çözüm yapılarak**

$y'' = r^2$
$y' = r$ yazılarak $r^2 + 7r + 12 = 0$ karakteristik denklemden
$y = 1$

$r^2 + 7r + 12 = 0$ $r_1 = -3$ $r_2 = -4$ **2 farklı reel kök**

$$y_{homojen} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$$

bulunur.

Özel çözümler

Sin2x için (i2 karakteristik denklemin kökü değil)

$y_{özel1} = A\cos 2x + B\sin 2x$ **seçilerek**

$y_{özel1} = A\cos 2x + B\sin 2x$
$y'_{özel1} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$
$y''_{özel1} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

ile $\sin 2x(-14A + 8B) + \cos 2x(8A + 14B) = \sin 2x$

$-14A + 8B = 1$ *A=-7/30 , B=4/30*
$8A + 14B = 0$

$$y_{özel1} = -\frac{7}{30}\cos 2x + \frac{4}{30}\sin 2x$$

2011-2012

e^{-3x} için özel çözüm

e^{-3x} üstel fonksiyonda x'in katsayısı (-3), karakteristik denklemin kökü olduğundan

$y_{özel2} = Axe^{-3x}$ **seçilerek**

$y_{özel2} = Axe^{-3x}$

$y'_{özel2} = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$

$y''_{özel2} = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$ diferansiyel denklemde yerlerine konularak

$Ae^{-3x} = e^{-3x}$ den A=1 ve

$$y_{özel2} = xe^{-3x}$$

bulunur.

Sabit sayı (4) için, 0 değeri karakteristik denklemin kökü değil.

$y_{özel3} = D$ **seçilirse** **D=1/3 bulunur**

$y_{özel3} = 4/12 = 1/3$

$$y_{genel} = y_h + y_{özel1} + y_{özel2} + y_{özel3}$$

$$y_{genel} = c_1e^{-3x} + c_2e^{-4x} - \frac{7}{30}\cos 2x + \frac{4}{30}\sin 2x + xe^{-3x} \mathbf{+1/3}$$

elde edilir.

7) $y'' - 5y' + 4y = -4(x^2+1)e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$y'' = r^2$

$y' = r$ yazılarak $r^2 - 5r + 4 = 0$ karakteristik denklemden

$y = 1$

$r^2 - 5r + 4 = 0$ $r_1 = 1$ $r_2 = 4$ **2 farklı reel kök**

$$y_{homojen} = c_1e^{x} + c_2e^{4x}$$

üstel fonksiyonnda x in katsayısı olan 3 değeri karakteristik denklemin <u>kökü olmadığından</u>

$y_{özel} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ seçilerek türevler alınır ve verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak *A,B ve* C katsayıları belirlenir.

2011-2012

$-2(Ax^2+Bx+C)+2Ax+B+2A=-4(x^2+1)$ den

A=2 , B=2 ve C=5 elde edilir. $y_{özel}=(2x^2+2x+5)e^{3x}$

$$y_{genel}=y_h+y_{özel}=c_1e^x+c_2e^{4x}+(2x^2+2x+5)e^{3x}$$

8) *11)* $x^2y''+xy'-4y=0$ *denkleminin bir* özel çözümü $y_1=x^2$ *olduğuna göre genel çözümü bulunuz.*

Mertebe İndirgeme yöntemi ; $y=vy_1=vx^2$

ile türevler alınıp verilen denklemde yerlerine yazılırsa yani,

$y=vx^2$, $y'=v'x^2+2vx$, $y''=v''x^2+4xv'+2v$

$x^2(v''x^2+4xv'+2v)+x(v'x^2+2vx)-4vx^2=0$ $v''x^4+4x^3v'+2x^2v+v'x^3+2vx^2-4vx^2=0$

$v''x^4+5v'x^3=0$ $v''/v'=-5/x$ *integar alınırsa;*

$\ln v'=-5\ln x+\ln c$ $\ln v'-\ln c=\ln x^{-5}$ $v'=cx^{-5}$ $dv/dx=cx^{-5}$ $v=-cv^{-4}/4+c_1$

$y=vx^2$ $y=x^2(-cv^{-4}/4+c_1)=-\frac{c}{4x^2}+cx^2$

$c_2=-\frac{c}{4}$ *konularak genel* çözüm

$y=\frac{c_2}{x^2}+c_1x^2$

2011-2012