Mühendislik Mekaniği
Dinamik

Yrd.Doç.Dr. Akın Ataş

Bölüm 17

Rijit Cismin Düzlemsel Kinetiği; Kuvvet ve İvme

Kaynak: ‘Mühendislik Mekaniği: Dinamik’, R.C.Hibbeler, S.C.Fan, Çevirenler: A. Soyuçok, Ö. Soyuçok.

17 Rijit Cismin Düzlemsel Kinetiği: Kuvvet ve İvme

Bölüm, eylemsizlik momenti denilen bir cisim özelliğinin sunulması ile başlamaktadır.

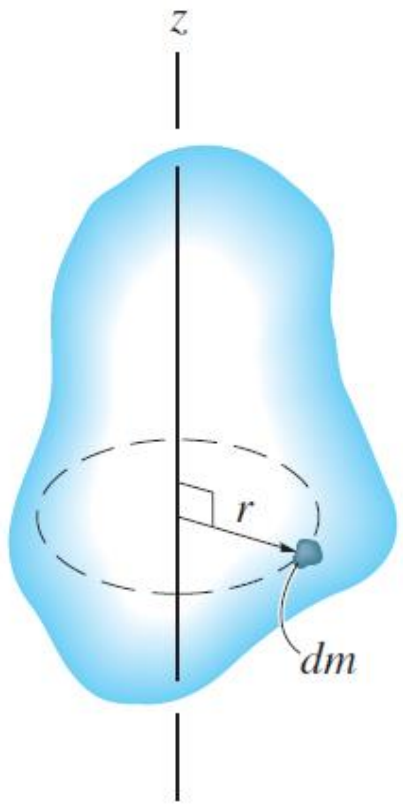
Ardından, simetrik bir rijit cismin genel düzlemsel hareketinin denklemleri elde edilmektedir.

Daha sonra, bu denklemler rijit cismin öteleme, sabit bir eksen etrafında dönme ve genel düzlemsel hareket problemlerine uygulanmaktadır.

Bu hareketlerin kinetiğinin incelenmesi, düzlemsel hareketin kinetiği veya kısaca *düzlemsel kinetik* olarak adlandırılır.

17.1 Kütle Eylemsizlik Momenti

Bir cismin kütle eylemsizlik momenti, cismin açısal ivmesine direncini ölçen bir özelliktir. Dinamikte, dönme hareketinin incelenmesinde kullanılır. Birimi kg·m^2'dir.



Kütle eylemsizlik momenti, cismi oluşturan bütün *dm* kütle elemanlarının bir eksene göre ikinci momentlerinin integrali olarak tanımlanır.

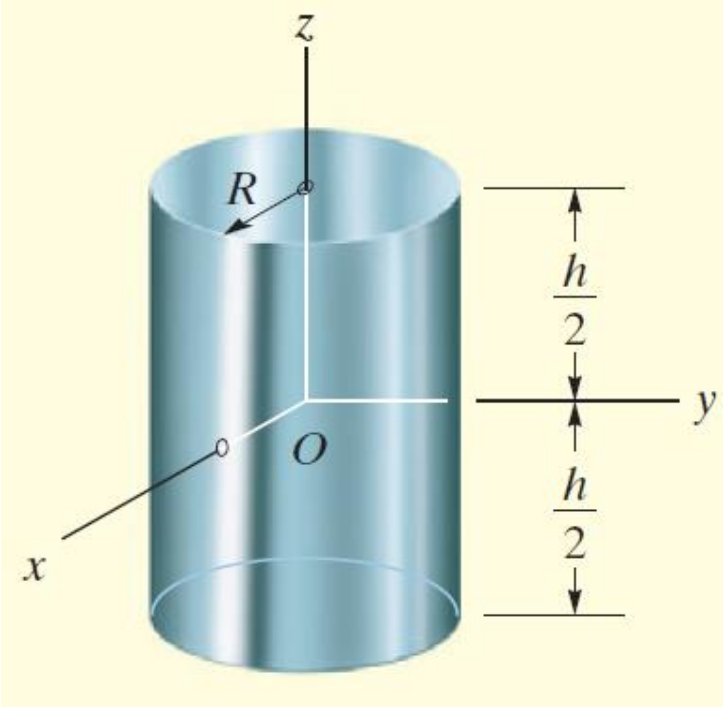
$$I = \int_m r^2 \, dm$$

G kütle merkezinden geçen eksene göre hesaplanan eylemsizlik momenti I_G ile gösterilir.

17.1 Kütle Eylemsizlik Momenti

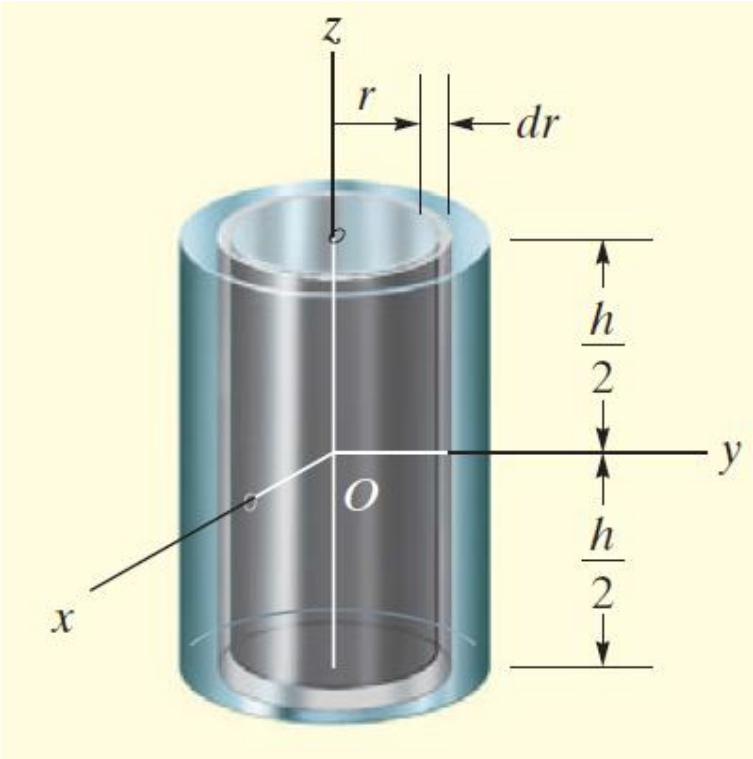
Bir traktörün volanı, dönme eksenine göre yüksek kütle eylemsizlik momentine sahiptir. Bir kere dönmeye başladıktan sonra durdurulması zordur ve bu şekilde sabit bir güç üretilmesine imkan verir.

Örnek 17-1



Şekilde gösterilen silindirin *z* eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız. Malzemenin *ρ* yoğunluğu sabittir.

Örnek 17-1



$$dV = (2\pi r)(h)\,dr$$

$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi h r\,dr)$$

$$dI_z = r^2\,dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2}R^4 h$$

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2$$

17.1 Kütle Eylemsizlik Momenti

Paralel Eksen Teoremi.

Cismin, kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti bilinirse, *paralel bir eksene* göre eylemsizlik momenti *paralel eksen teoremi* kullanılarak belirlenebilir.

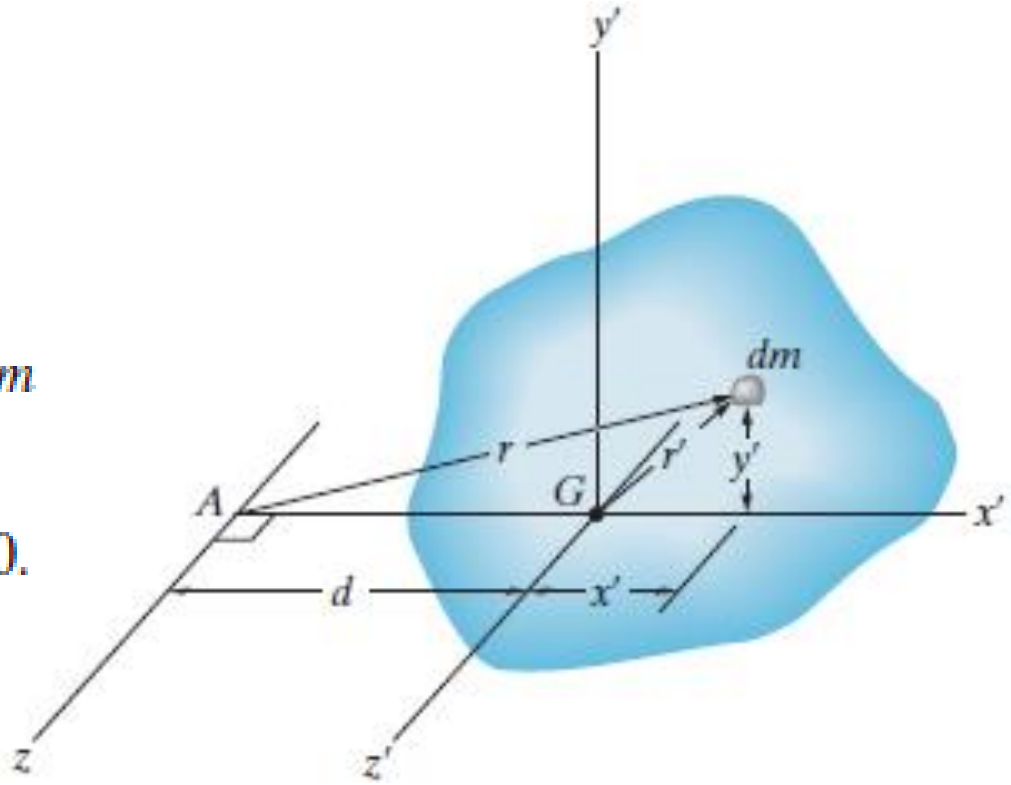
$$r^2 = (d + x')^2 + y'^2,$$

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2, \quad \int x'\, dm = \bar{x} \int dm = 0 \text{ since } \bar{x} = 0.$$

$$\boxed{I = I_G + md^2}$$



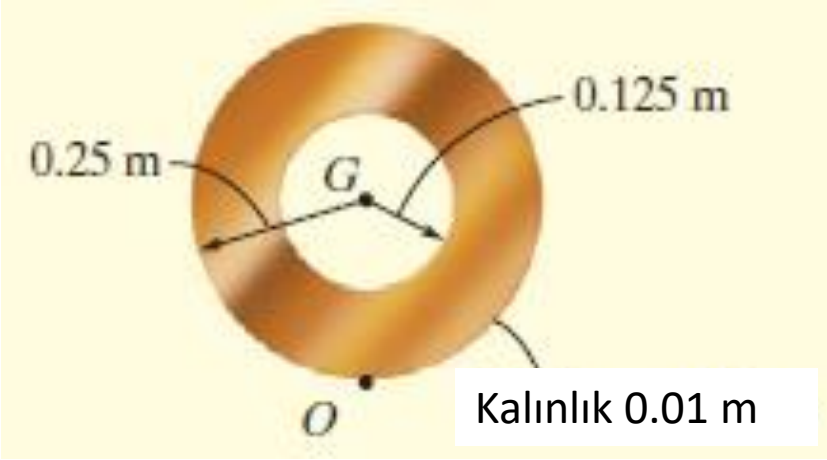
17.1 Kütle Eylemsizlik Momenti

Eylemsizlik Yarıçapı.

Bazen bir cismin özel bir eksene göre eylemsizlik momenti, kitaplarda *eylemsizlik yarıçapı*, *k*, kullanılarak verilir. Bu, uzunluk birimindedir ve bu değer ve cismin *m* kütlesi bilindiği zaman, eylemsizlik momenti belirlenebilir.

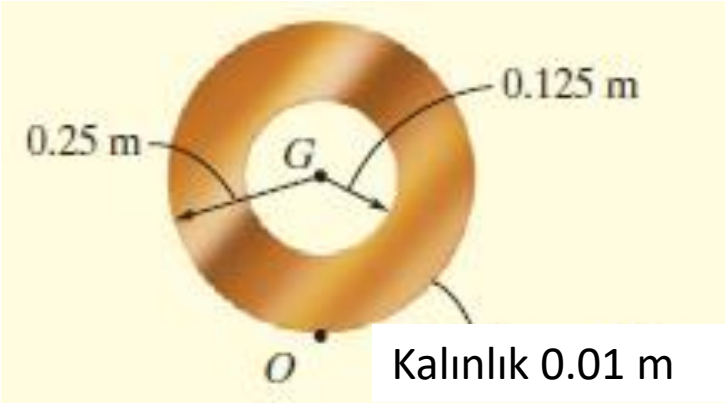
$$I = mk^2 \quad \text{or} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Örnek 17-2



Gösterilen plağın yoğunluğu 8000 kg/m^3 ve kalınlığı 0.01 m olduğuna göre, *O* noktasından geçen ve sayfa düzlemine dik eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

Örnek 17-2



Kalınlık 0.01 m

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2.$$

Disk.

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\ \text{kg/m}^3\,[\pi(0.25\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 15.71\ \text{kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 + (15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Delik.

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3\,[\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.93\ \text{kg}$$

$$(I_O)_h = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3.93\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.93\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

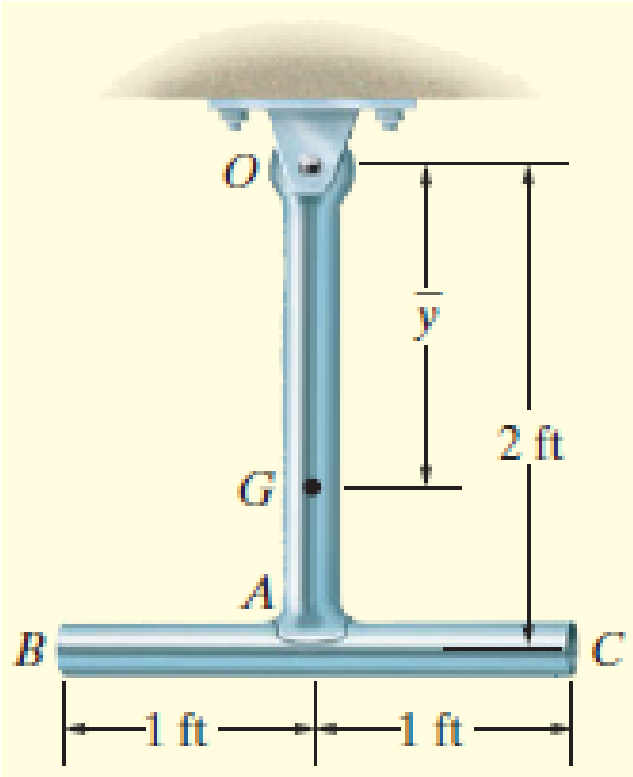
$$= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_O = (I_O)_d - (I_O)_h$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

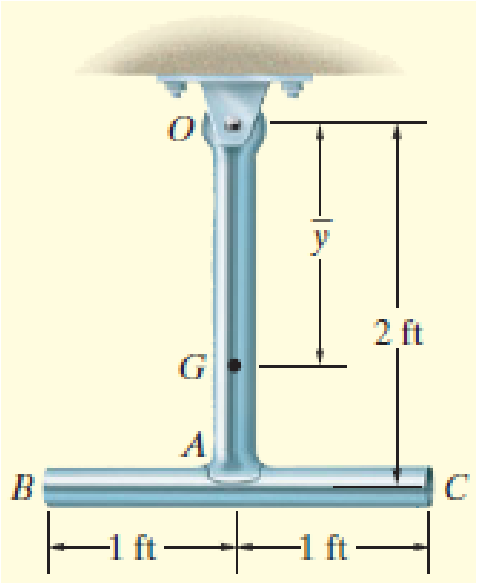
$$= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Örnek 17-3



Sarkaç, şekilde gösterildiği gibi, *O* noktasından asılı her biri 10 lb ağırlığındaki iki ince çubuktan oluşmuştur. Sarkacın, (*a*) *O*'daki pimden, (*b*) *G* kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momentini belirleyiniz.

Örnek 17-3



(a). OA Çubuğu

$$I_O = \tfrac{1}{3}ml^2.$$

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 = 0.414\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

Aynı değer paralel eksen teoremi ile de hesaplanabilirdi.

$$I_G = \tfrac{1}{12}ml^2$$

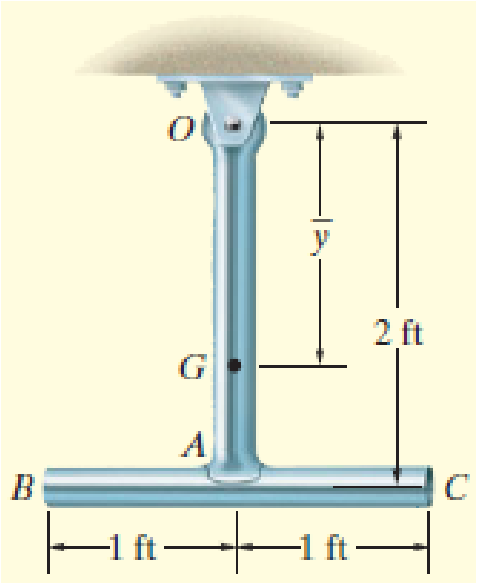
$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(1\text{ ft})^2$$
$$= 0.414\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

BC Çubuğu

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(2\text{ ft})^2$$
$$= 1.346\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

Örnek 17-3



(b).

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50 \text{ ft}$$

$$I_O = I_G + md^2; \qquad 1.76 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 = I_G + \left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(1.50 \text{ ft})^2$$

$$I_G = 0.362 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

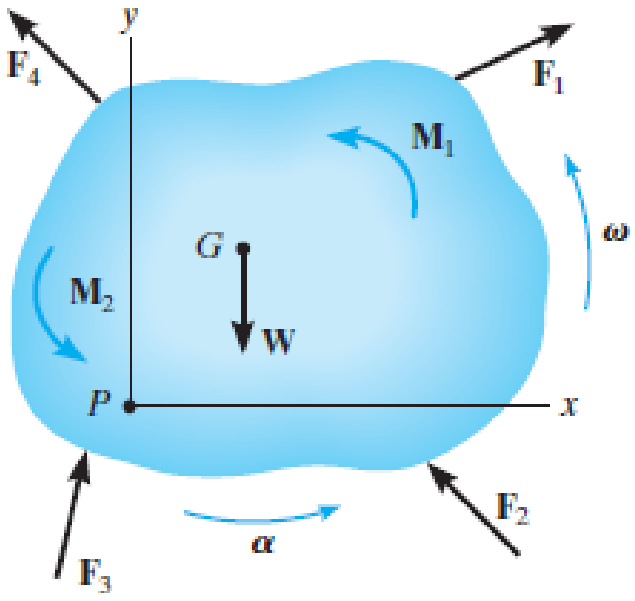
17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

İncelememizi, yüklemeleri ile birlikte, sabit bir referans düzlemine göre simetrik olduğu kabul edilen rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği ile sınırlayacağız. Böyle bir rijit cismin düzlemsel hareketi sabit bir referans düzleminde analiz edilebilir, çünkü cismin her bir parçacığının yörüngesi referans düzlemine paralel bir düzlemsel eğridir.

Buna göre, cismin hareketi referans düzlemi içindeymiş gibi görülebilir ve cisim üzerine etkiyen bütün kuvvetler (ve kuvvet çiftleri) düzleme izdüşürülebilir.

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Bu tipten bir keyfi cisim örneği görülmektedir. *x, y ve z eylemsiz referans sistemi* cisim içindeki keyfi bir *P* noktasıyla çakışan bir orijine sahiptir. Tanım olarak bu eksenler dönmez, sabittir veya sabit hızla ötelenir.

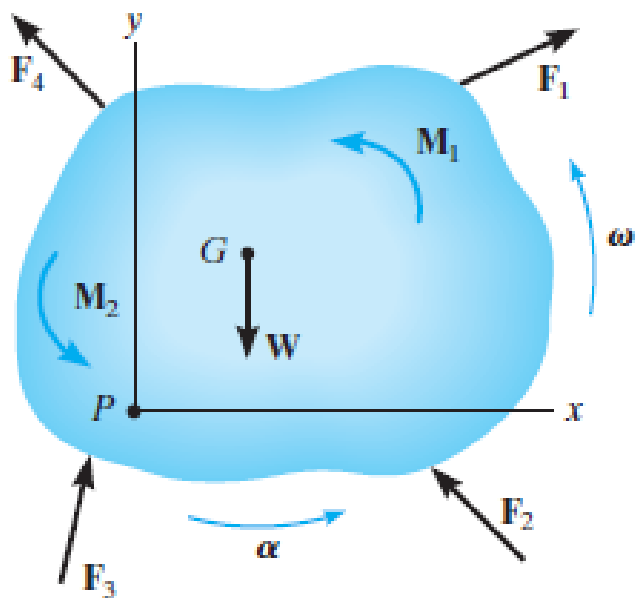


17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Öteleme Hareketinin Denklemi.

Hareket denklemi cismin parçacıklarının her birine uygulanır ve sonuçlar vektörel olarak toplanırsa, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ elde edilir.

Bu denklem, bir rijit cismin kütle merkezinin *öteleme hareketi denklemi* olarak adlandırılır.



Cismin *x-y* düzlemindeki hareketinde, *G* için hareket denklemi iki bağımsız skaler denklem formunda yazılabilir:

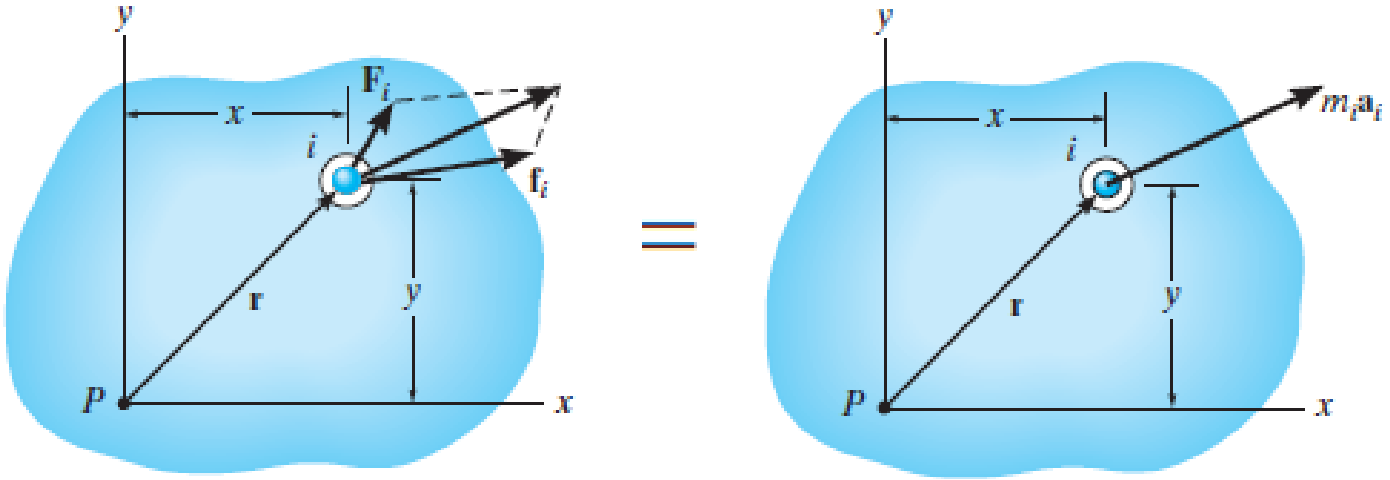
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.

Şimdi, dış kuvvetler sisteminin momentlerinin neden olduğu etkileri belirleyeceğiz.



$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_P)_i &= m_i\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}) \\ &= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]\end{aligned}$$

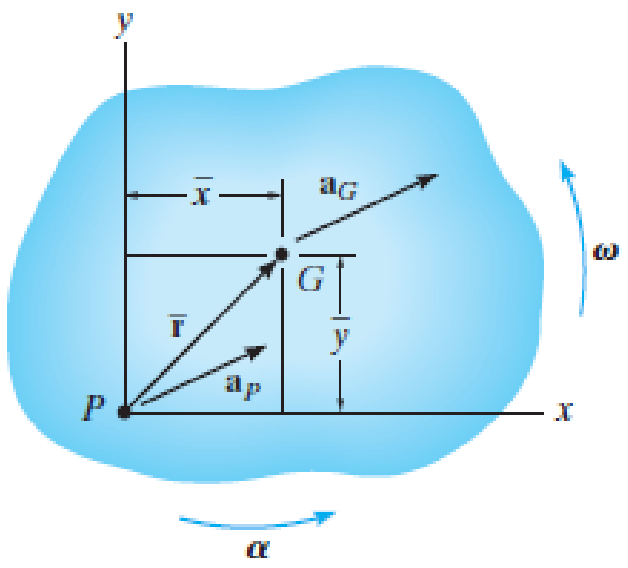
$$\begin{aligned}(M_P)_i\mathbf{k} &= m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] \\ &\quad + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}\end{aligned}$$

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k}$$

$$\circlearrowleft (M_P)_i = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]$$

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.



$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}$$

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k}$$

$$\circlearrowleft (M_P)_i = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]$$

$$m_i \rightarrow dm \qquad \circlearrowleft \Sigma M_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2 dm\right)\alpha$$

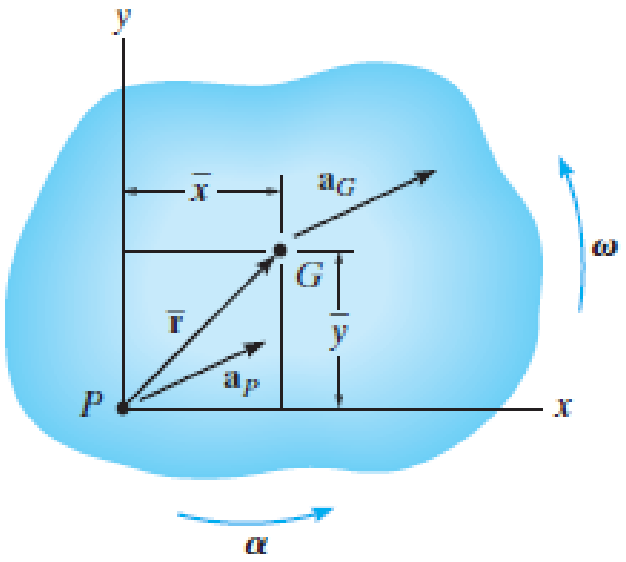
$$\bar{y}m = \int y\,dm \qquad \bar{x}m = \int x\,dm, \qquad I_{\bar{P}} = \int r^2 dm.$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \qquad \boxed{\Sigma M_G = I_G\alpha}$$

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.

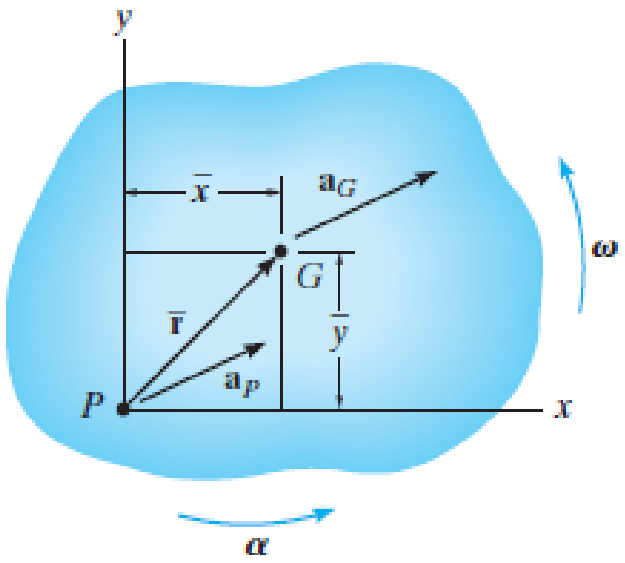


$$\boxed{\Sigma M_G = I_G \alpha}$$

Dönme hareketinin denklemi, bütün dış kuvvetlerin cismin G kütle merkezine göre hesaplanan momentlerinin toplamının, cismin G'den geçen bir eksenine göre eylemsizlik momentinin cismin açısal ivmesi ile çarpımına eşit olduğunu ifade eder.

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.



$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha$$

$$I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha$$

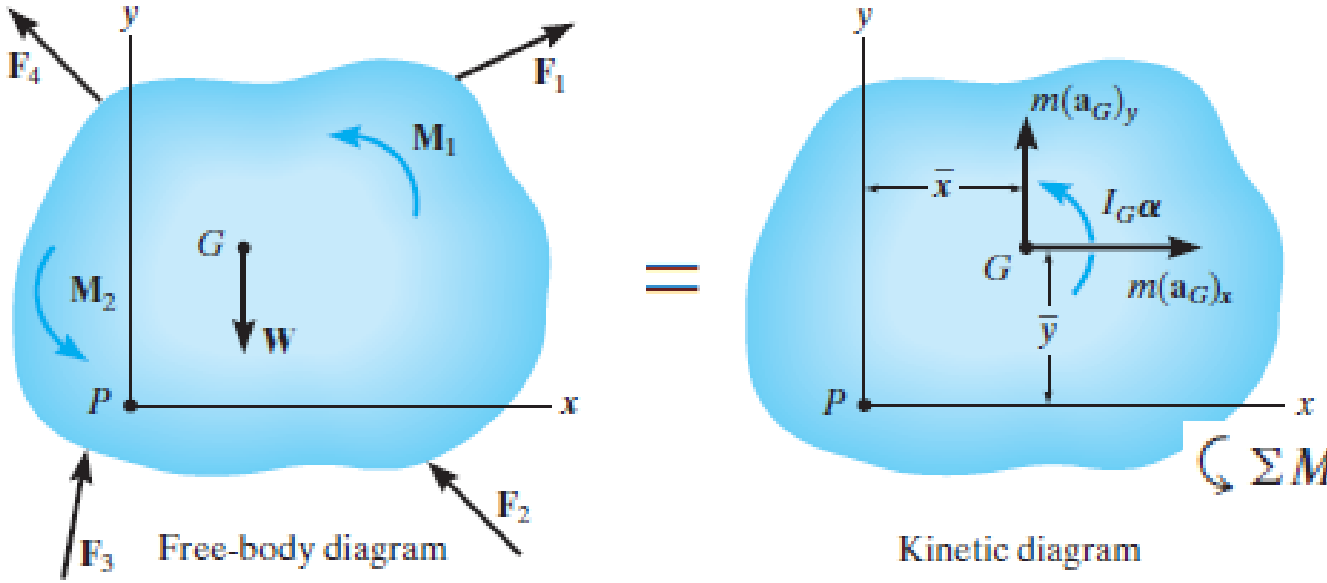
$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$
$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.



$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$
$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

$$[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$$
$$[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$$

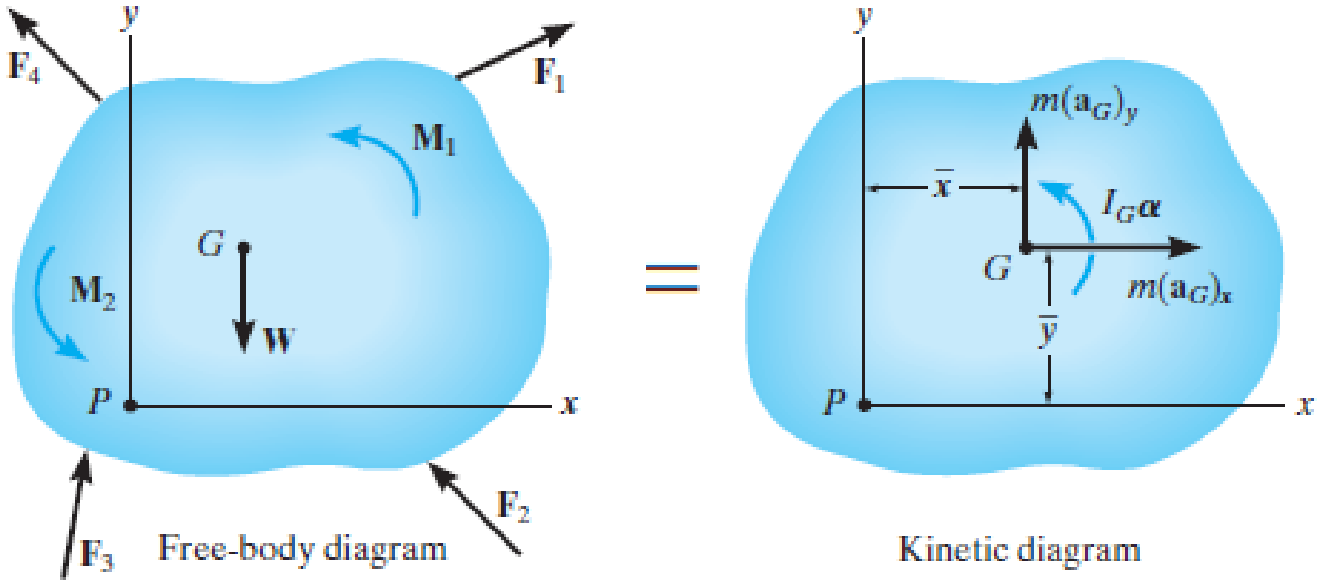
$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha$$

*Bu önemli sonuç, SCD'de gösterilen dış kuvvetlerin P'ye göre momentleri toplanırsa, bu toplamın, m**a**$_G$ bileşenlerinin «kinetik momentlerinin» toplamı ile I_G**α** kinetik momentinin toplamına eşit olduğunu ifade eder.*

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Dönme Hareketinin Denklemi.



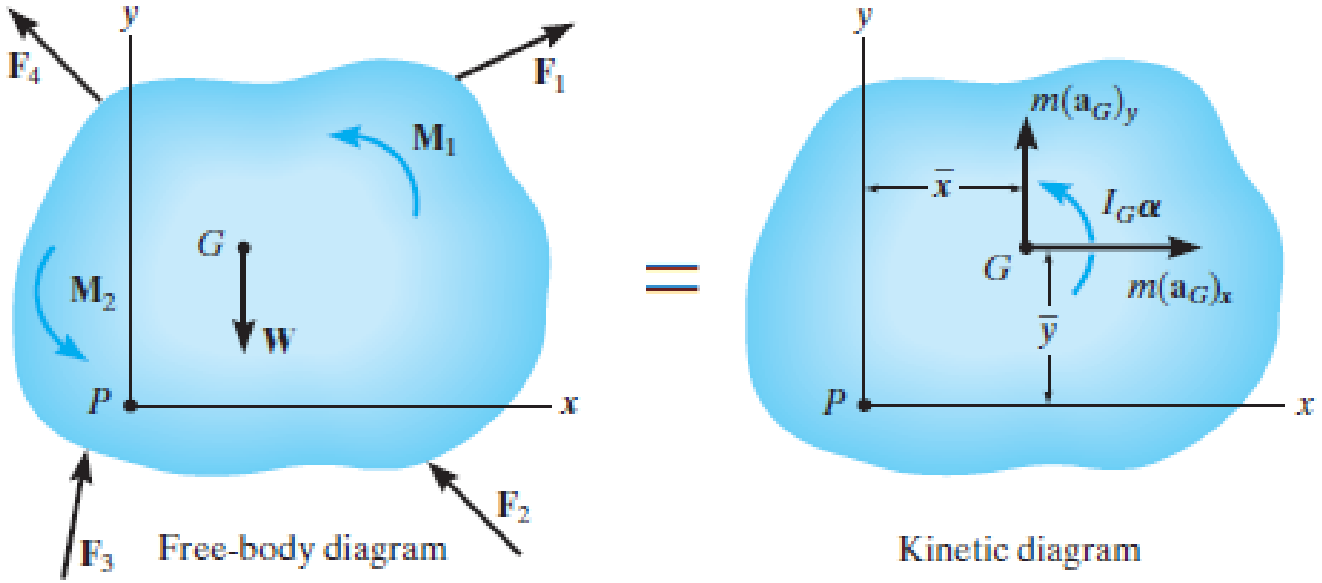
$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha$$

$$\boxed{\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P}$$

$(\mathcal{M}_k)$ *«kinetik momentleri» hesaplanırken, m(**a**$_G$)$_x$ ve m(**a**$_G$)$_y$ vektörleri kayan vektörler gibi davranır, etki çizgileri boyunca herhangi bir noktada etki edebilir. I_G**α** da serbest vektör gibi davranır, herhangi bir noktada etki edebilir.*

17.2 Düzlemsel Hareketin Kinetik Denklemleri

Hareket Denklemlerinin Genel Uygulaması.



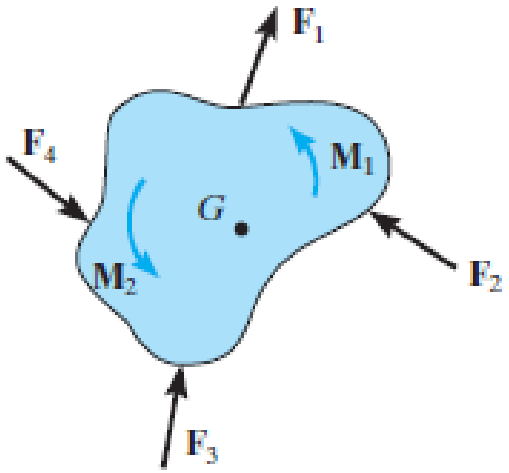
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

Bu denklemler uygulanırken *daima* serbest cisim diyagramı çizilmelidir.

Bazı problemlerde, cismin *kinetik diyagramını* çizmek de yararlı olabilir.

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme

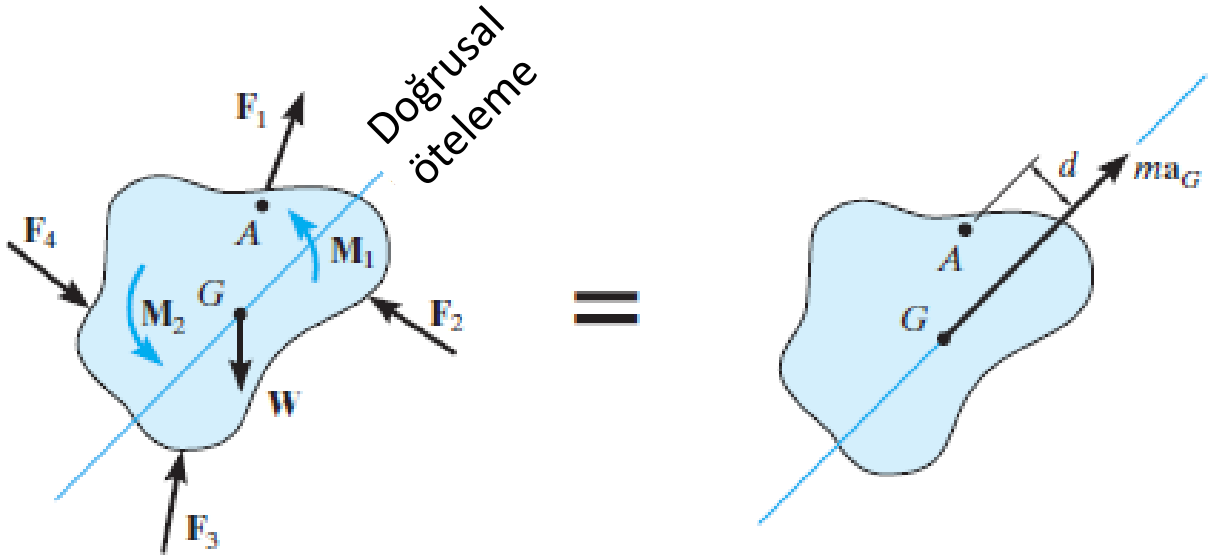


Bir rijit cisim *öteleme* hareketi yaptığında, cismin bütün parçacıkları *aynı ivmeye* sahip olur, dolayısıyla $\boldsymbol{a}_G=\boldsymbol{a}$'dır. Ayrıca, $\boldsymbol{\alpha}=0$'dır ve bu halde G noktasına uygulanan dönme hareketinin denklemi basit bir şekilde $\Sigma M_G=0$'a dönüşür.

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme

Doğrusal Öteleme.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0$$



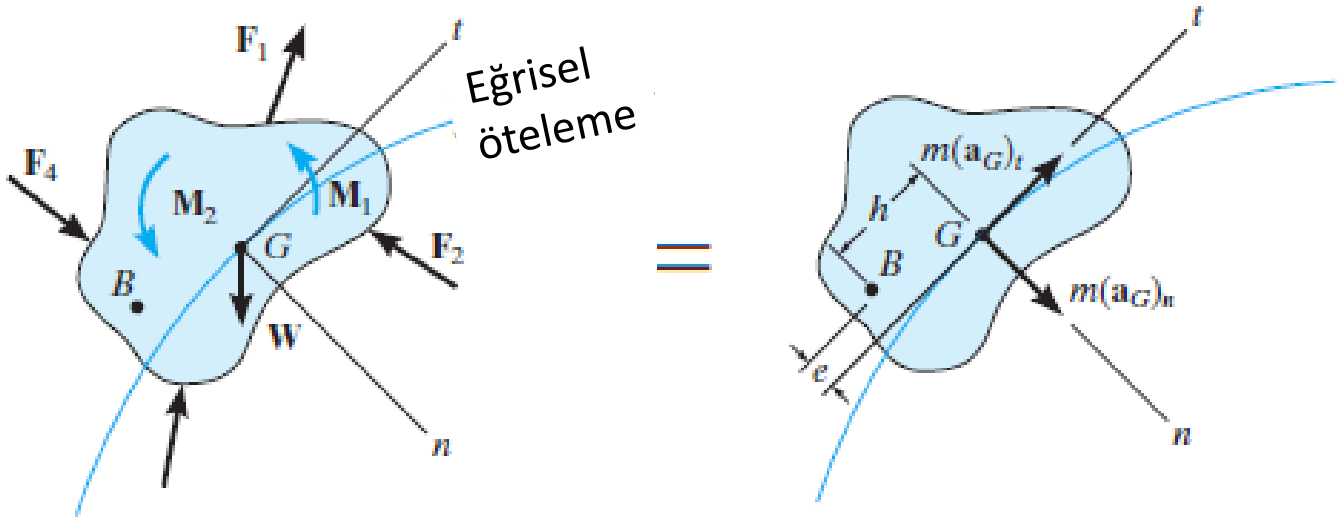
Bir cisim *doğrusal öteleme* hareketi yaptığında, cismin tüm parçacıkları *paralel doğru yörüngeler* boyunca hareket eder. $I_G\boldsymbol{\alpha}=0$ olduğundan, kinetik diyagramda sadece $m\boldsymbol{a}_G$ bulunmaktadır.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme

Eğrisel Öteleme.

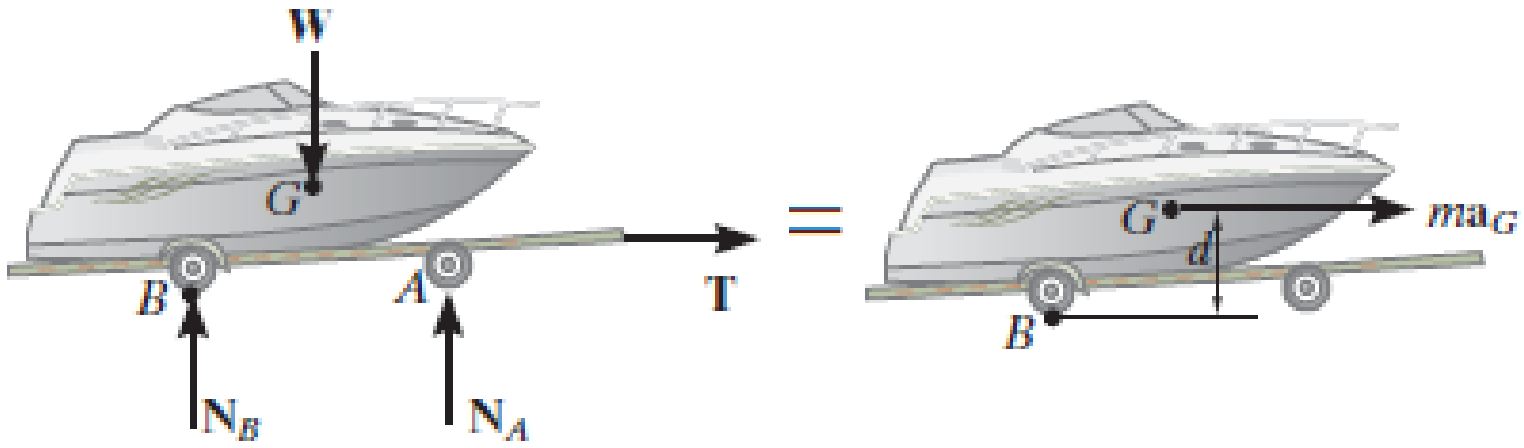
$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$



Bir cisim *eğrisel öteleme* hareketi yaptığında, cismin tüm parçacıkları *paralel eğri yörüngeler* boyunca hareket eder. Analiz için verilen bir anda cismin kütle merkeziyle çakışan bir orijine sahip olan doğal koordinat sistemini kullanmak uygundur.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme



Hareket denklemlerinin uygulanması için öncelikle bot ve traktörün serbest cisim ve kinetik diyagramları çizilir. *SCD* üzerindeki kuvvetler, kinetik diyagramdaki etkilere sebep olurlar. Momentler *G*'ye göre toplanırsa, ΣM_G=0 olur. Ama momentler *B* noktasına göre toplanırsa, o zaman; $\circlearrowleft + \Sigma M_B = ma_G(d).$ olarak hesaplanır.

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme

Analizde İzlenecek Yol.

SCD. *x*, *y* veya *n*, *t* koordinat sistemi seçilir ve bütün dış kuvvetler ile kuvvet çiftleri gösterilir. $\boldsymbol{a}_G$ ivmesinin doğrultu ve yönü de gösterilmelidir. İvme, koordinat sisteminde işaretlenmelidir.

Hareket Denklemleri.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x \qquad \Sigma F_y = m(a_G)_y \qquad \Sigma M_G = 0$$

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n \qquad \Sigma F_t = m(a_G)_t \qquad \Sigma M_G = 0$$

Analizi basitleştirmek için, ΣM_G=0 yerine *P* noktası olabildiğince çok bilinmeyen kuvvetin etki çizgisinin kesim yeri olmak üzere, çok daha genel olan $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ denklemi kullanılır.

17.3 Hareket Denklemleri: Öteleme

Analizde İzlenecek Yol.

Kinematik. Cismin hız ve konumu belirlenecekse kinematik kullanılır.

Değişken ivmeli doğrusal öteleme için

$$a_G = dv_G/dt \quad a_G ds_G = v_G dv_G \quad v_G = ds_G/dt$$

Sabit ivmeli doğrusal öteleme için

$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \qquad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$

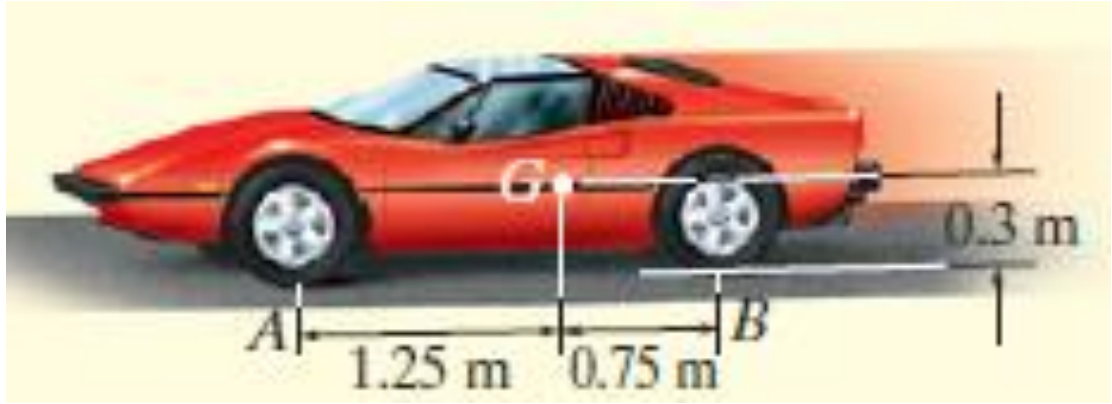
$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2} a_G t^2$$

Eğrisel öteleme için

$$(a_G)_n = v_G^2/\rho = \omega^2 \rho$$

$$(a_G)_t = dv_G/dt, (a_G)_t ds_G = v_G dv_G, (a_G)_t = \alpha\rho$$

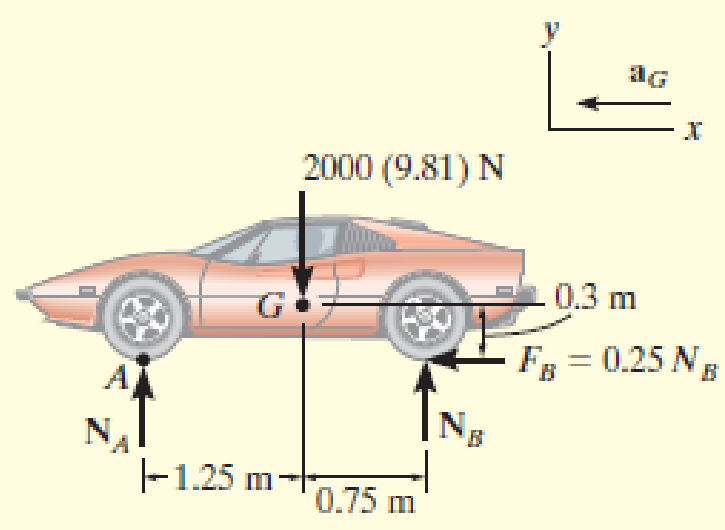
Örnek 17-4



Şekildeki arabanın kütlesi 2 Mg'dır ve kütle merkezi *G*'dedir. Ön tekerlekler serbestçe dönebiliyorken, arkadaki çekiş tekerlekleri daima kaydığına göre, arabanın ivmesini belirleyiniz. Tekerleklerin kütlesini ihmal ediniz. Tekerlekler ve yol arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k=0.25'dir.

Örnek 17-4

Çözüm I.



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad -0.25N_B = -(2000\text{ kg})a_G \quad (1)$$

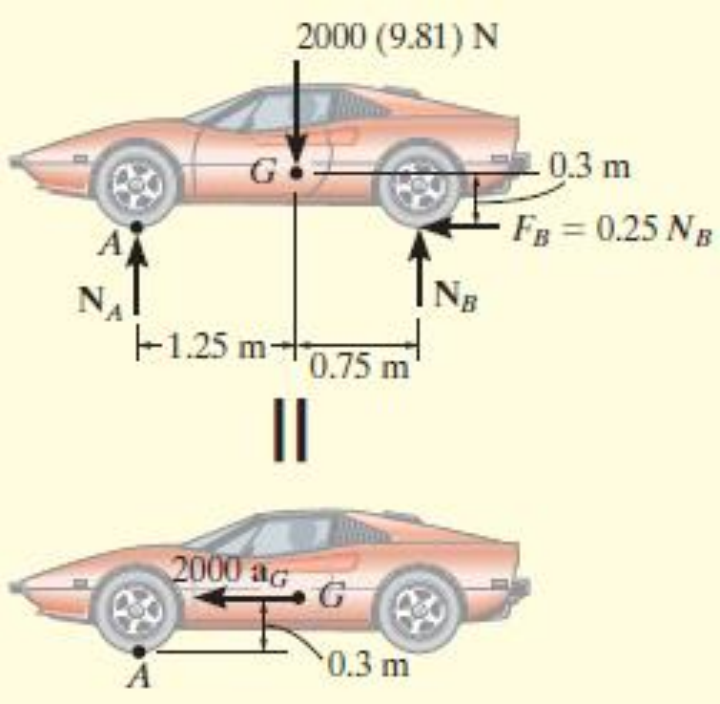
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A + N_B - 2000(9.81)\text{ N} = 0 \quad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -N_A(1.25\text{ m}) - 0.25N_B(0.3\text{ m}) + N_B(0.75\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

$$a_G = 1.59\text{ m/s}^2 \leftarrow$$
$$N_A = 6.88\text{ kN}$$
$$N_B = 12.7\text{ kN}$$

Örnek 17-4

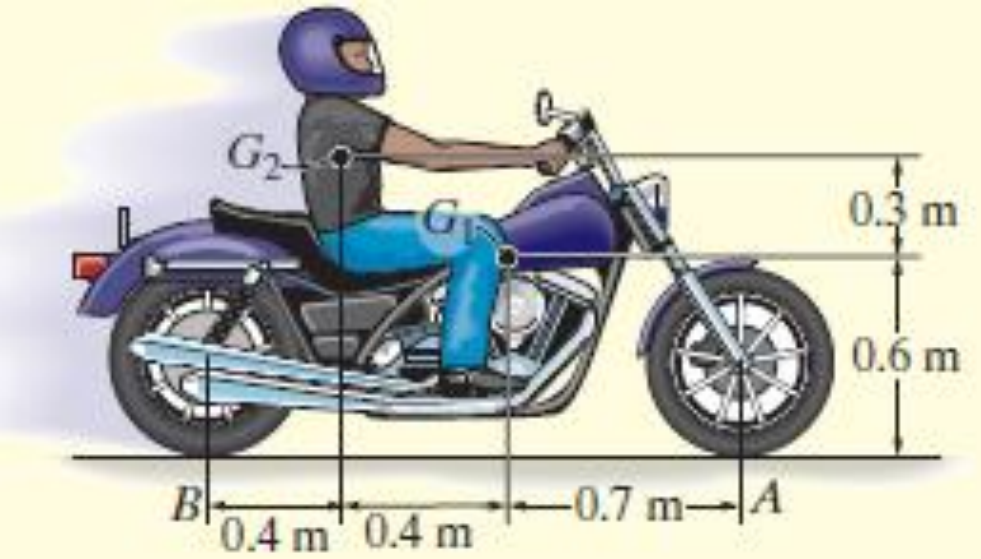
Çözüm II.



$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad N_B(2\text{ m}) - [2000(9.81)\text{ N}](1.25\text{ m}) = (2000\text{ kg})a_G(0.3\text{ m})$$

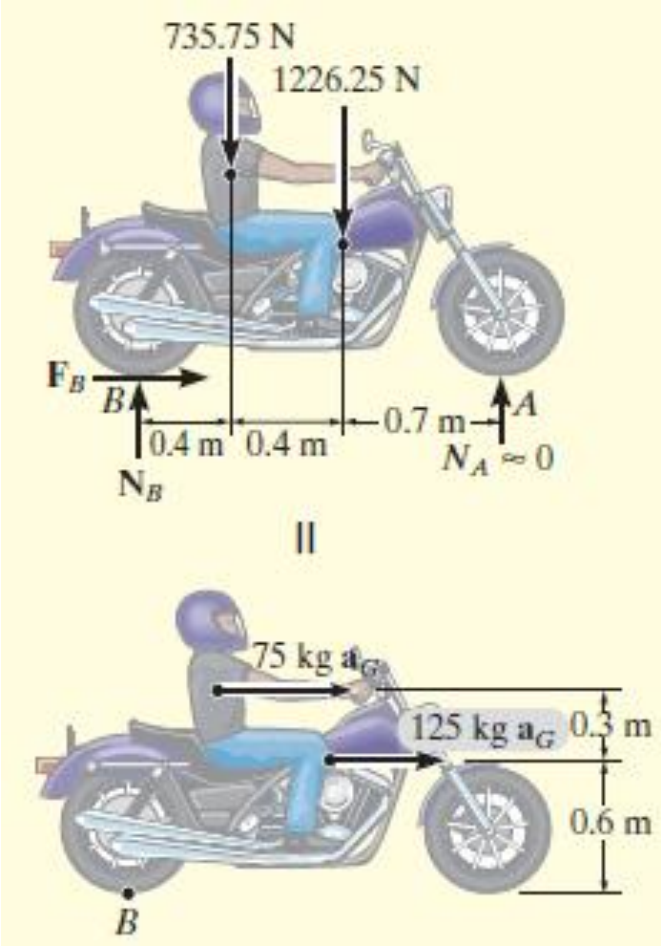
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad -0.25N_B = -(2000\text{ kg})a_G \quad (1)$$

Örnek 17-5



Şekildeki motorsiklet 125 kg'lık kütleye sahiptir ve kütle merkezi G_1'dedir. Sürücünün kütlesi ise 75 kg'dır ve kütle merkezi G_2'dedir. Tekerlekler ve asfalt arasında μ_s=0.8 olduğuna göre, sürücünün ön tekerleği yerden kaldırmasının mümkün olup olmadığını belirleyiniz. Tekerleklerin kütlesini ihmal ediniz ve ön tekerleğin serbestçe dönebildiğini varsayınız.

Örnek 17-5



$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735.75\text{ N} - 1226.25\text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \quad -(735.75\text{ N})(0.4\text{ m}) - (1226.25\text{ N})(0.8\text{ m}) =$$

$$-(75\text{ kg } a_G)(0.9\text{ m}) - (125\text{ kg } a_G)(0.6\text{ m}) \qquad (2)$$

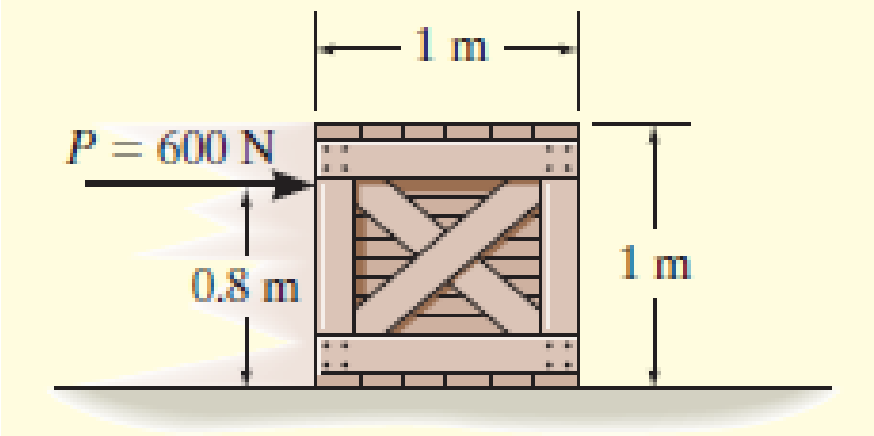
$$a_G = 8.95\text{ m/s}^2 \rightarrow$$

$$N_B = 1962\text{ N}$$

$$F_B = 1790\text{ N}$$

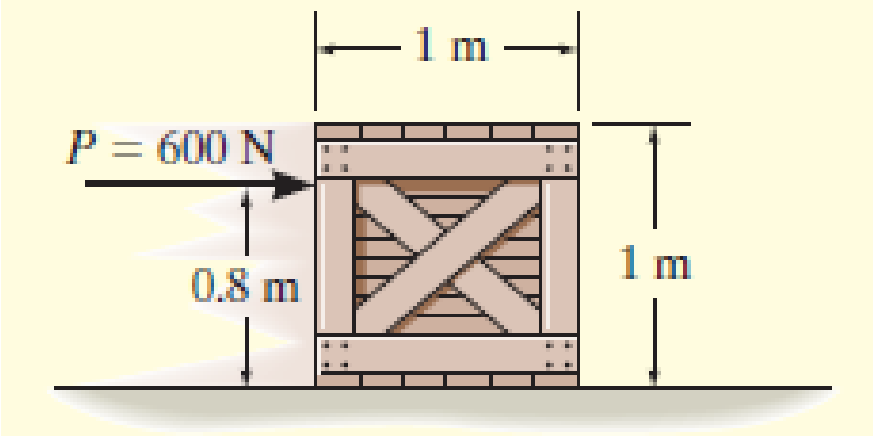
$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0.912$$

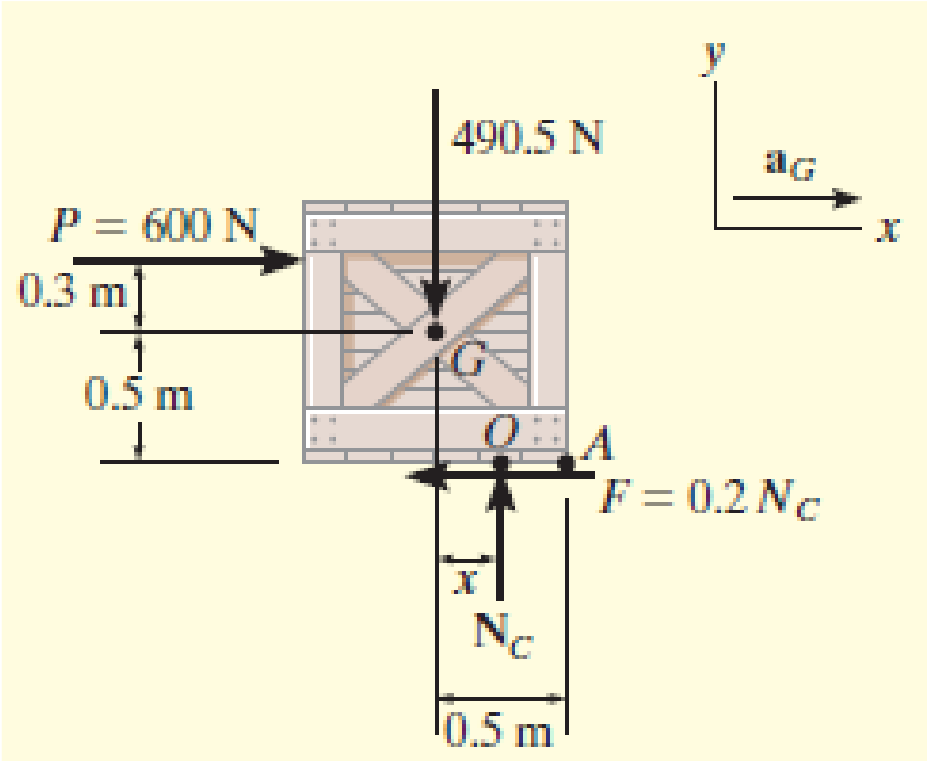
Örnek 17-6



50 kg'lık düzgün bir sandık, μ_k=0.2 olan yatay bir yüzey üzerinde durmaktadır. Sandığa, P=600 N'luk bir kuvvet uygulandığına göre, ivmesini belirleyiniz.

Örnek 17-6





$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 600\text{ N} - 0.2N_C = (50\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_C - 490.5\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \qquad -600\text{ N}(0.3\text{ m}) + N_C(x) - 0.2N_C(0.5\text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

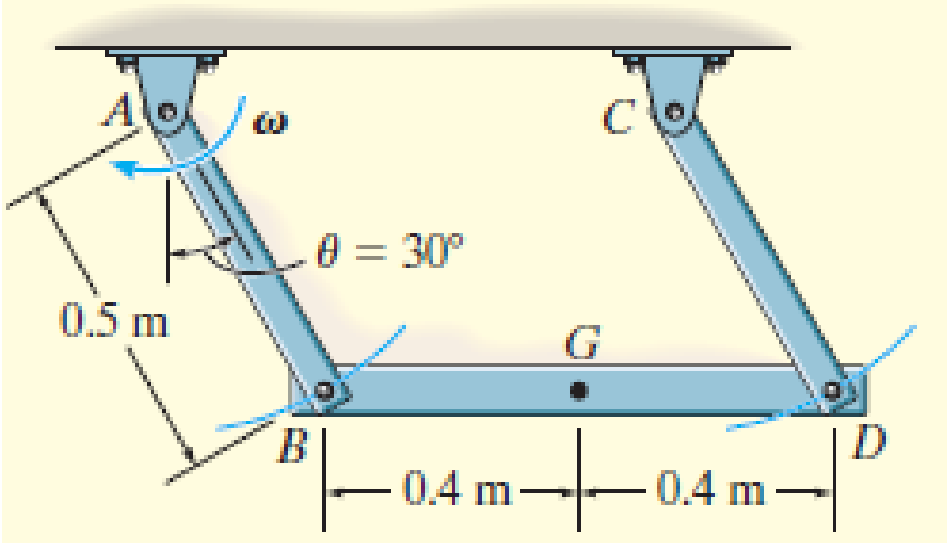
$$N_C = 490.5\text{ N}$$

$$x = 0.467\text{ m}$$

$$a_G = 10.0\text{ m/s}^2 \rightarrow$$

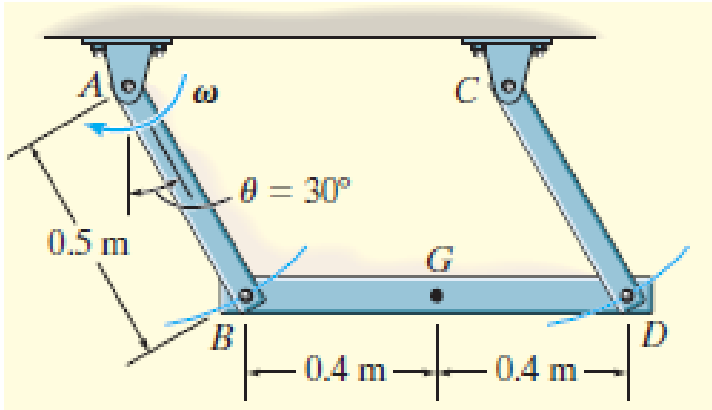
$$x = 0.467\text{ m} < 0.5\text{ m}$$

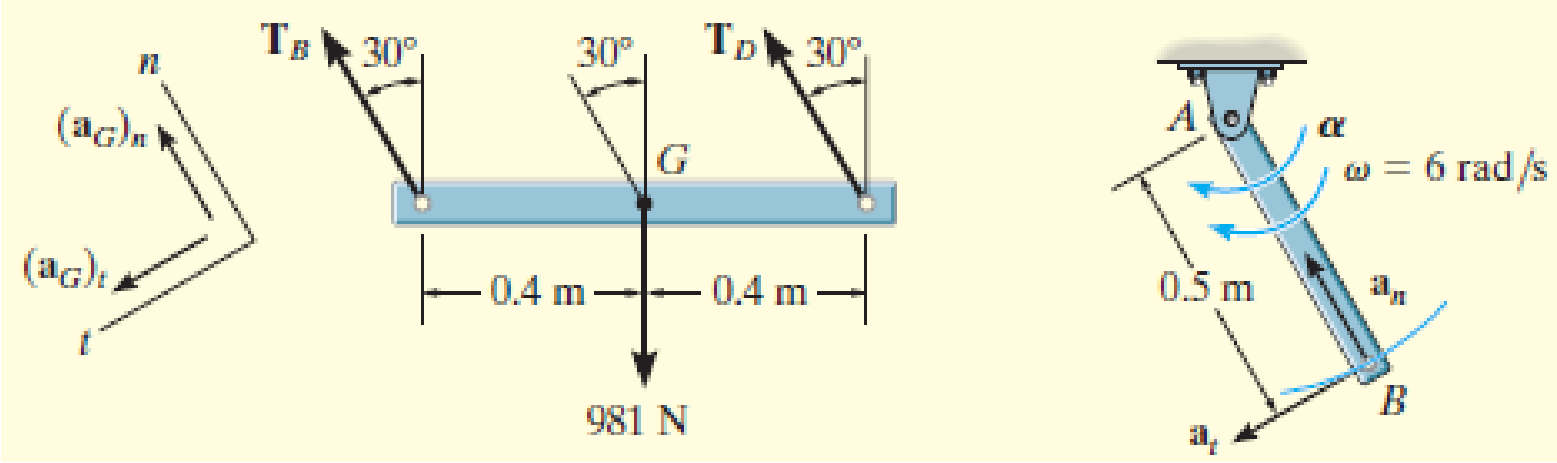
Örnek 17-7



Şekildeki 100 kg'lık *BD* kirişi kütlesi ihmal edilebilir iki çubukla desteklenmektedir. Her iki çubuk θ=30˚ olduğu anda *ω*=6 rad/s açısal hızıyla dönmekte olduğuna göre, her iki çubukta oluşan kuvveti belirleyiniz.

Örnek 17-7





$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6\ \text{rad/s})^2(0.5\ \text{m}) = 18\ \text{m/s}^2$$

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;\ T_B + T_D - 981\cos 30^\circ\ \text{N} = 100\ \text{kg}(18\ \text{m/s}^2) \quad (1)$$

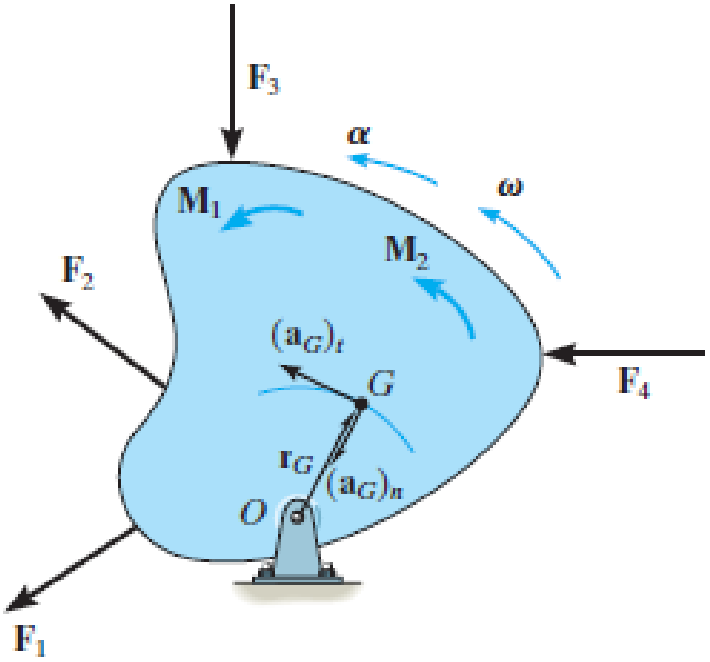
$$+\swarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \qquad 981\sin 30^\circ = 100\ \text{kg}(a_G)_t \quad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;\ -(T_B\cos 30^\circ)(0.4\ \text{m}) + (T_D\cos 30^\circ)(0.4\ \text{m}) = 0 \quad (3)$$

$$T_B = T_D = 1.32\ \text{kN}$$

$$(a_G)_t = 4.905\ \text{m/s}^2$$

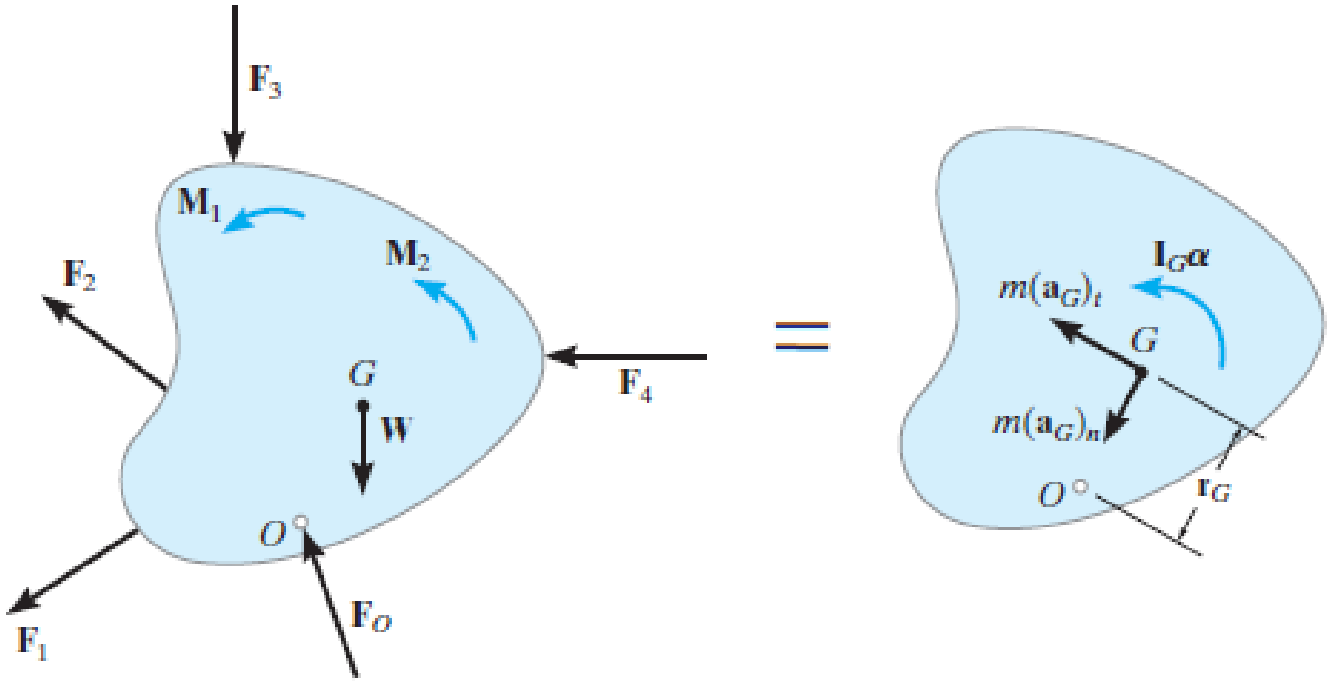
17.4 Hareket Denklemleri: Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme



Cismin *G* kütle merkezinin *dairesel bir yolda* hareket etmesi nedeniyle ivmesi teğetsel ve normal bileşenlerle ifade edilebilir.

$$(a_G)_t = \alpha r_G \qquad (a_G)_n = \omega^2 r_G$$

17.4 Hareket Denklemleri: Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme



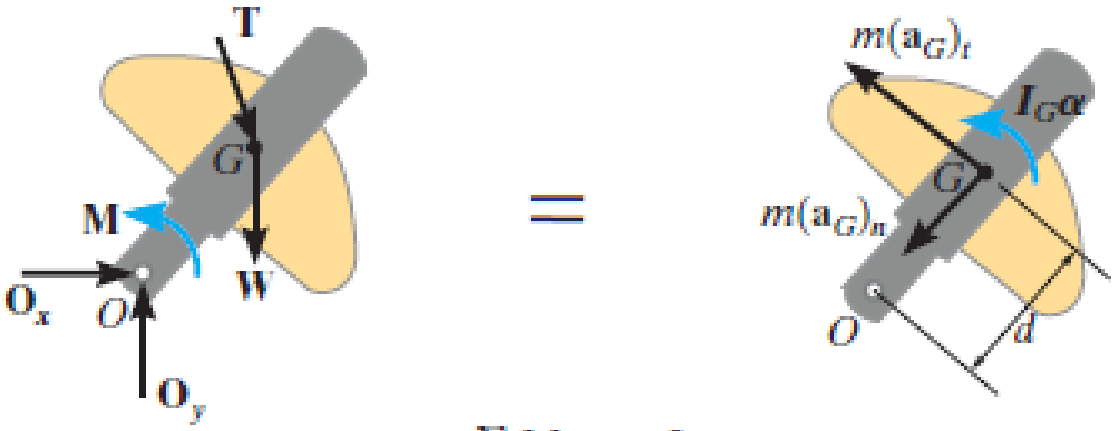
$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

Moment denklemi, cisim üzerindeki veya dışındaki herhangi bir keyfi *P* noktasına göre de yazılabilir.

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_O = I_O\alpha$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha$$

17.4 Hareket Denklemleri: Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme



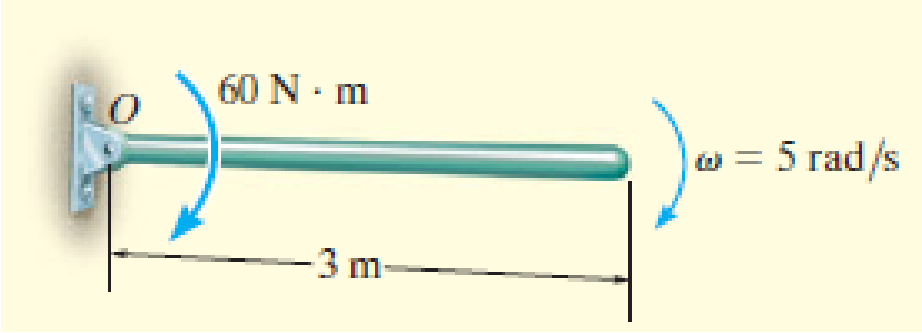
$$\Sigma M_G = I_G\alpha.$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = (I_G + md^2)\alpha = I_O\alpha.$$

$$(a_G)_t = \alpha d$$

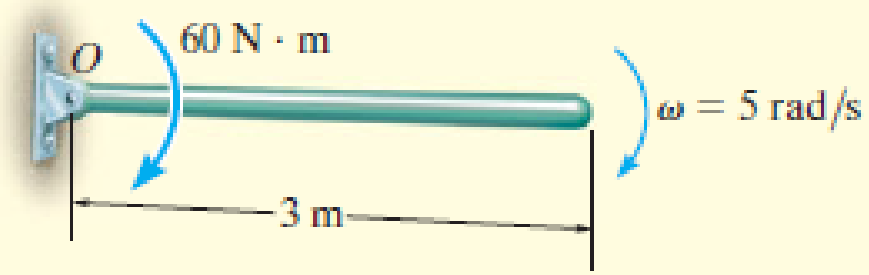
Petrol kuyusunda kullanılan krank, motorun uyguladığı **M** torku nedeniyle sabit bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. SCD üzerinde gösterilen yüklemeler, kinetik diyagram üzerinde gösterilen etkilere neden olur.

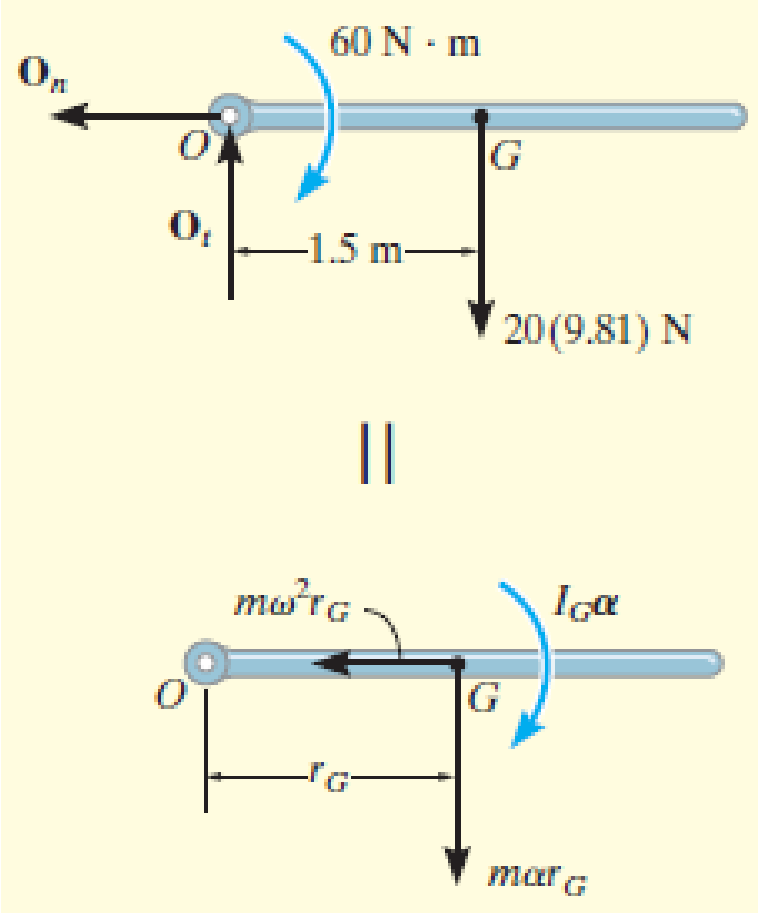
Örnek 17-8



Şekildeki 20 kg'lık ince çubuk, düşey düzlemde dönmektedir ve gösterilen anda ω=5 rad/s'lik açısal hızla dönmektedir. Çubuğun bu andaki açısal ivmesini ve pimdeki tepkinin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz.

Örnek 17-8





$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1.5\text{ m})$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 20(9.81)\text{N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1.5\text{ m})$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad O_t(1.5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = \left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

$$O_n = 750\text{ N} \qquad O_t = 19.05\text{ N} \qquad \alpha = 5.90\text{ rad/s}^2$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) =$$

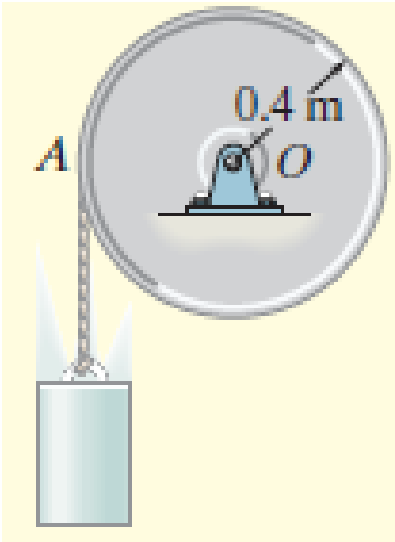
$$\left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1.5\text{ m})](1.5\text{ m})$$

$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \; 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = \left[\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

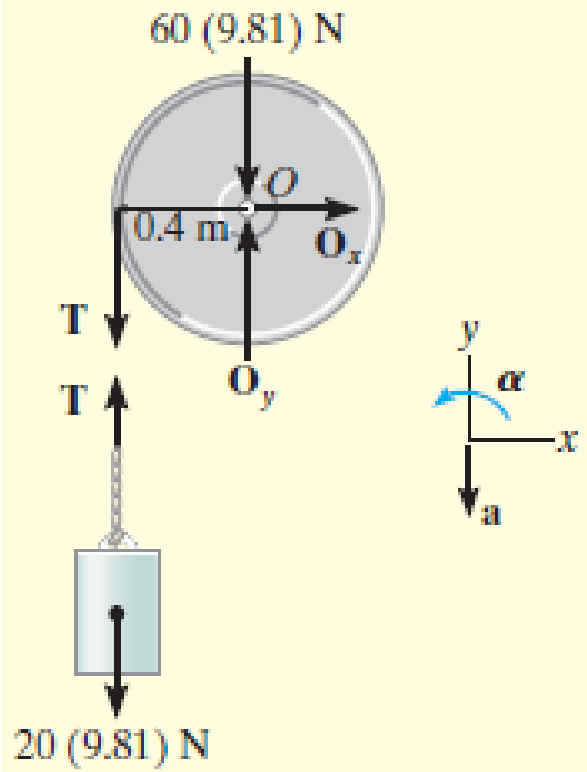
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

Örnek 17-9



Şekildeki volan 60 kg'lık kütleye ve k_O=0.25 m'lik eylemsizlik yarıçapına sahiptir. Kütlesi ihmal edilebilen bir ip volanın etrafına sarılmış ve 20 kg kütleli bir bloğa bağlanmıştır. Blok serbest bırakıldığına göre, volanın açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 17-9



$$I_O = mk_O^2 = (60\text{ kg})(0.25\text{ m})^2 = 3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

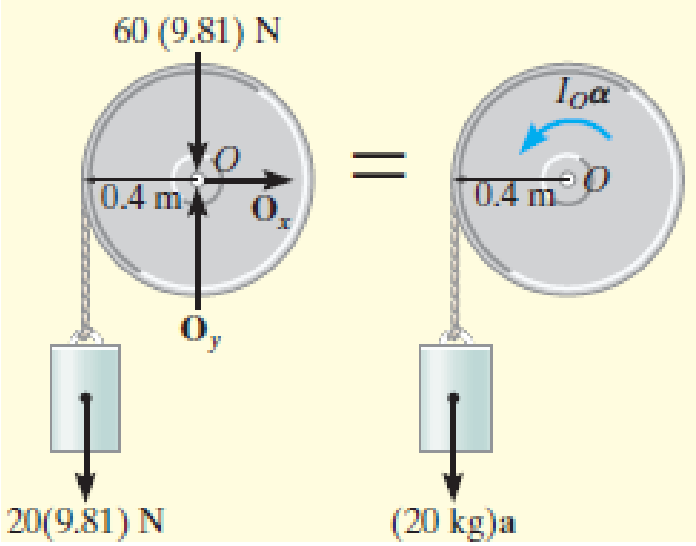
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0.4\text{ m}) = (3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad -20(9.81)\text{N} + T = -(20\text{ kg})a$$

$$\circlearrowleft + a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0.4\text{ m})$$

$$T = 106\text{ N} \quad a = 4.52\text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

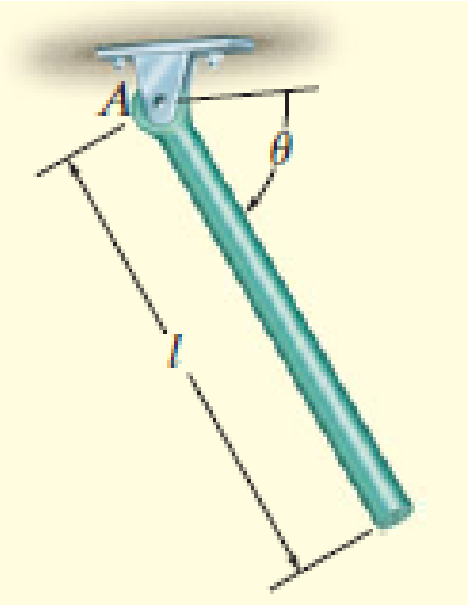


$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad [20(9.81)\text{N}]\,(0.4\text{ m}) =$$

$$(3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [20\text{ kg}(\alpha\,0.4\text{ m})](0.4\text{ m})$$

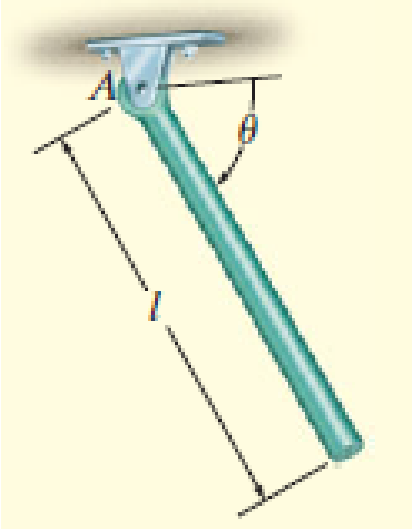
$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2$$

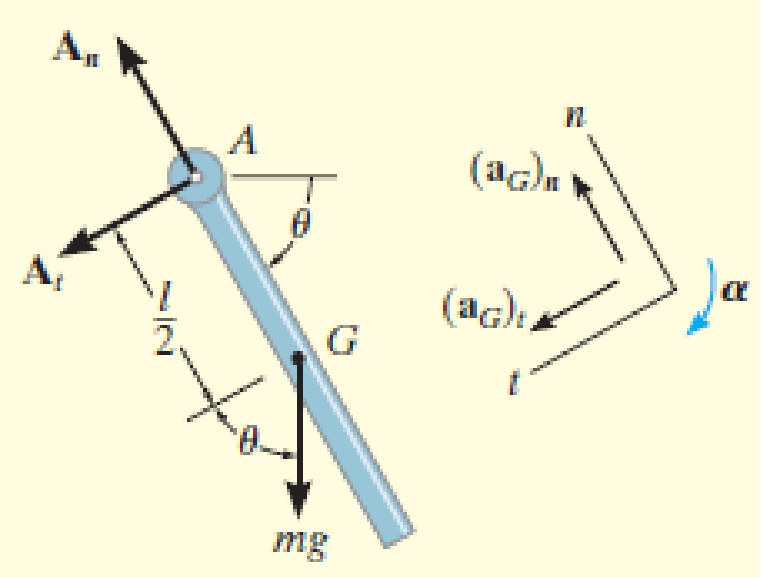
Örnek 17-10



Şekildeki *m* kütleli, *l* uzunluklu ince çubuk, θ=0˚ olduğu anda durağan halden serbest bırakılıyor. *A*'daki mafsalın θ=90˚ olduğu anda çubuğa uyguladığı kuvvetin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz.

Örnek 17-10





$$I_A = \tfrac{1}{3}ml^2.$$

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad A_n - mg\sin\theta = m\omega^2(l/2)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad A_t + mg\cos\theta = m\alpha(l/2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = I_A\alpha; \qquad mg\cos\theta(l/2) = \left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\alpha$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$$

$$\omega\, d\omega = (1.5g/l)\cos\theta\, d\theta$$

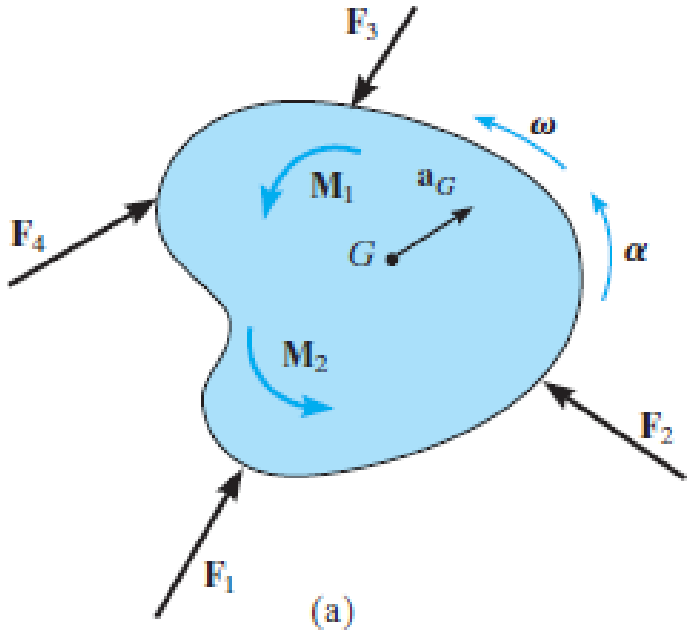
$$\int_0^{\omega} \omega\, d\omega = (1.5g/l)\int_{0^\circ}^{90^\circ} \cos\theta\, d\theta$$

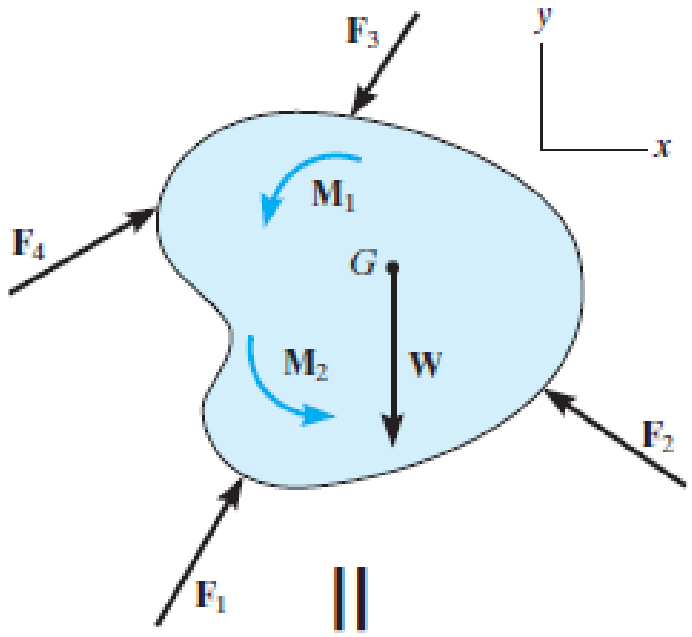
$$\omega^2 = 3g/l$$

$$\alpha = 0$$

$$A_t = 0 \quad A_n = 2.5mg$$

17.5 Hareket Denklemleri: Genel Düzlemsel Hareket

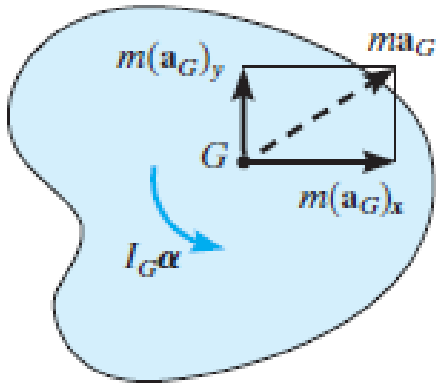




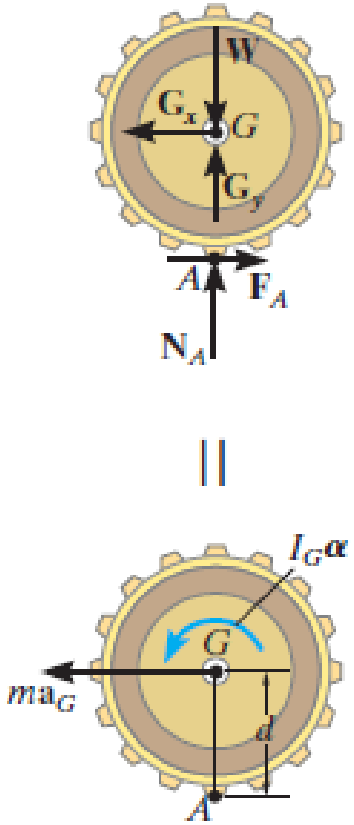
Cisim genel düzlemsel hareket yapmaktadır.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$



17.5 Hareket Denklemleri: Genel Düzlemsel Hareket

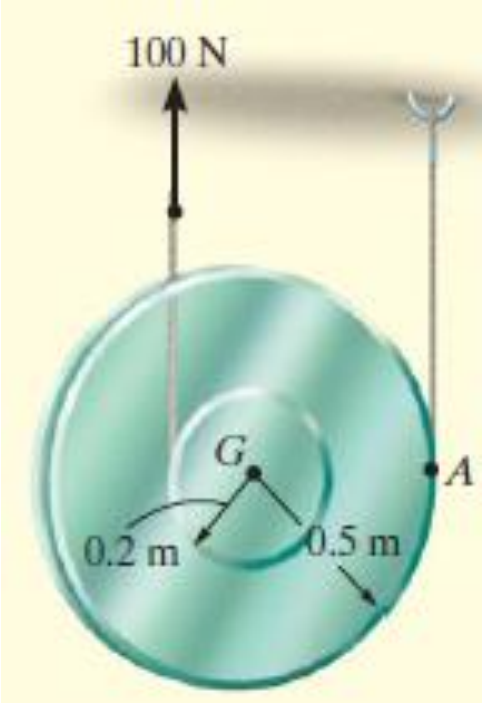


$$\Sigma M_G = I_G\alpha.$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d = I_A\alpha.$$

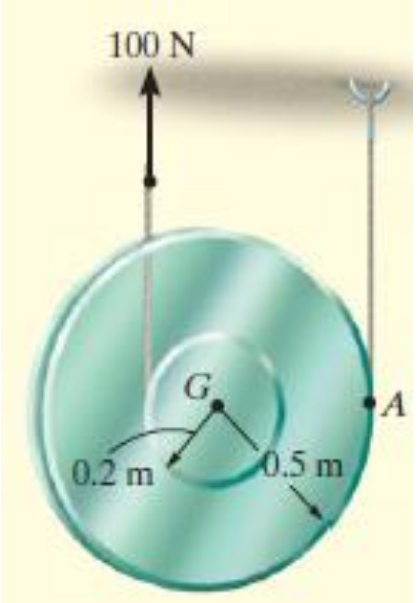
Araç ileri doğru hareket ettiğinde silindir genel düzlemsel hareket yapar. *SCD* üzerinde gösterilen kuvvetler kinetik diyagramdaki etkilere sebep olur.

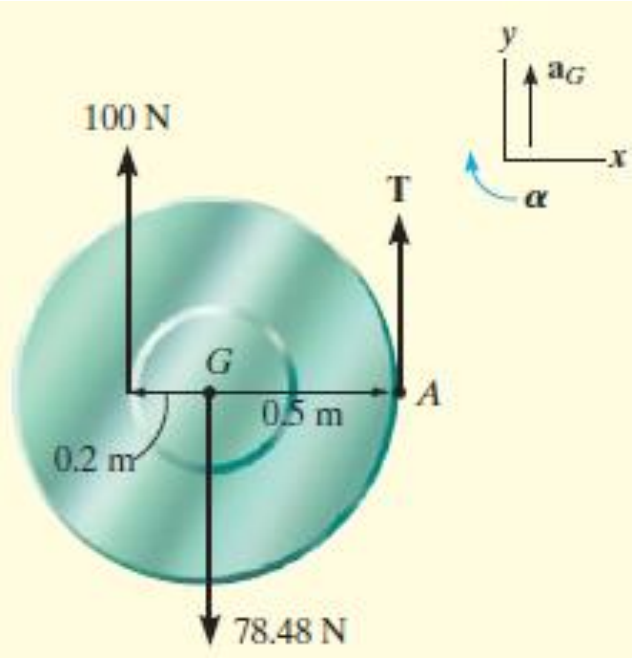
Örnek 17-11



Şekildeki makaranın kütlesi 8 kg, eylemsizlik yarıçapı k_G=0.35 m'dir. Kütlesi ihmal edilebilir ipler, şekilde gösterildiği gibi, içteki göbeğe ve dış çevreye sarılmış olduğuna göre, makaranın açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 17-11





$$I_G = mk_G^2 = 8\text{ kg}(0.35\text{ m})^2 = 0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

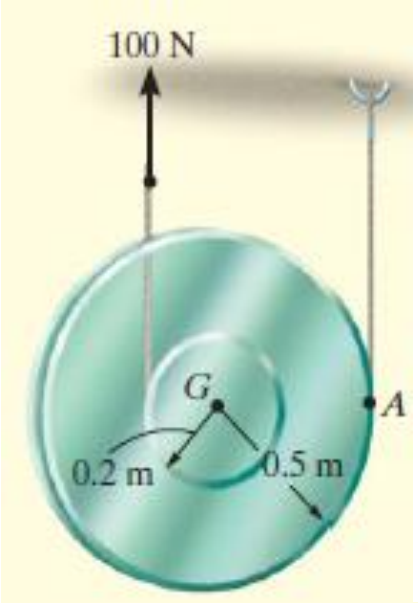
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T + 100\text{ N} - 78.48\text{ N} = (8\text{ kg})a_G$$

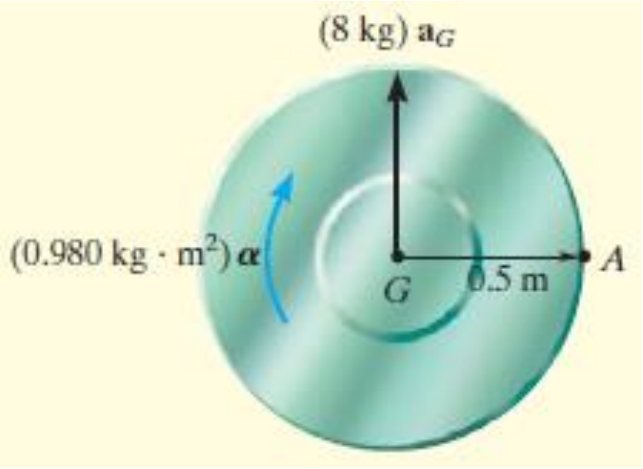
$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 100\text{ N}(0.2\text{ m}) - T(0.5\text{ m}) = (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$(\circlearrowleft +)\ a_G = \alpha r. \qquad a_G = \alpha\,(0.5\text{ m})$$

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2$$
$$a_G = 5.16\text{ m/s}^2$$
$$T = 19.8\text{ N}$$

Örnek 17-11





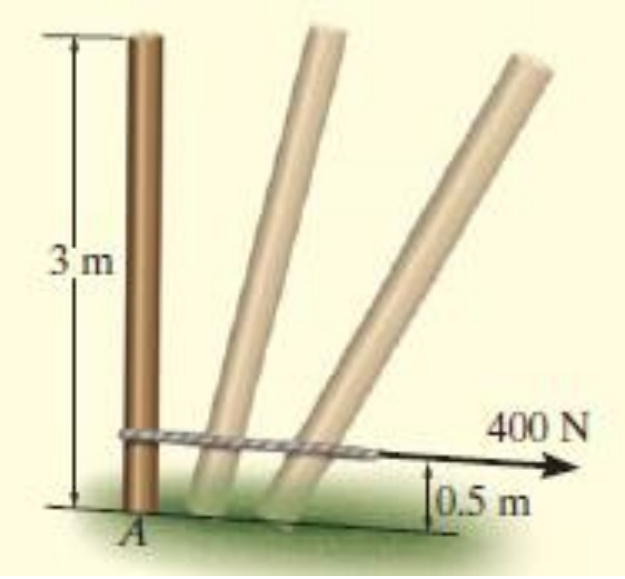
$$\circlearrowright + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad 100\ \text{N}(0.7\ \text{m}) - 78.48\ \text{N}(0.5\ \text{m}) = (0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8\ \text{kg})a_G](0.5\ \text{m})$$

$$\alpha = 10.3\ \text{rad/s}^2$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = I_A\alpha; \quad (100\ \text{N})(0.7\ \text{m}) - (78.48\ \text{N})(0.5\ \text{m}) = [0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (8\ \text{kg})(0.5\ \text{m})^2]\alpha$$

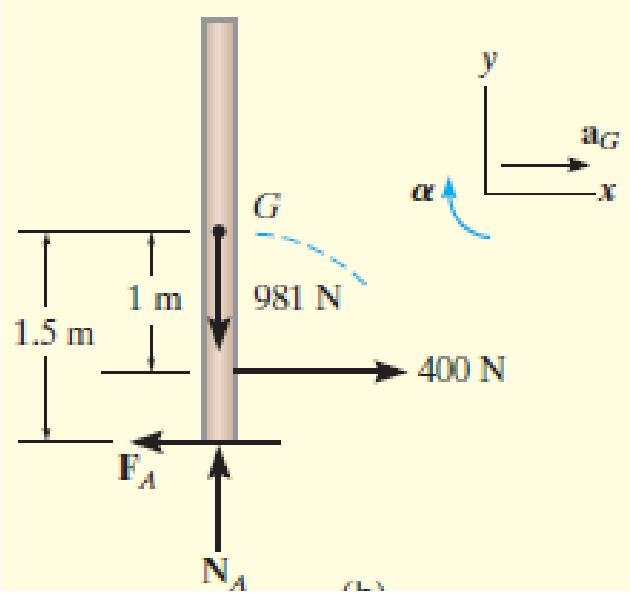
$$\alpha = 10.3\ \text{rad/s}^2$$

Örnek 17-12



Şekilde gösterilen düzgün ince direğin kütlesi 100 kg ve eylemsizlik momenti I_G=75 kgm^2'dir. Direk ve yüzey arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayısı sırasıyla μ_s= 0.3 ve μ_k=0.25 olduğuna göre, direğin 400 N'luk bir yatay kuvvet uygulandığı andaki açısal ivmesini belirleyiniz. Direk başlangıçta hareketsizdir.

Örnek 17-12



$$\mathbf{v}_G = \mathbf{0}, \qquad (a_G)_y = v_G^2/\rho = 0.$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 400\text{ N} - F_A = (100\text{ kg})a_G$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 981\text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \; F_A(1.5\text{ m}) - (400\text{ N})(1\text{ m}) = ([\tfrac{1}{12}(100\text{ kg})(3\text{ m})^2)\alpha$$

$$a_G = \alpha r_{AG};$$

$$a_G = (1.5\text{ m})\,\alpha$$

$$N_A = 981\text{ N} \qquad F_A = 300\text{ N}$$

$$a_G = 1\text{ m/s}^2 \qquad \alpha = 0.667\text{ rad/s}^2$$

$$F_A \le \mu_s N_A \qquad 300\text{ N} > 0.3(981\text{ N}) = 294\text{ N}$$

$$F_A = \mu_k N_A \qquad F_A = 0.25 N_A$$

$$N_A = 981\text{ N} \qquad F_A = 245\text{ N} \qquad a_G = 1.55\text{ m/s}^2$$

$$\alpha = -0.428\text{ rad/s}^2 = 0.428\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$