Mühendislik Mekaniği
Dinamik

Yrd.Doç.Dr. Akın Ataş

Bölüm 16

Rijit Cismin Düzlemsel Kinematiği

Kaynak: ‘Mühendislik Mekaniği: Dinamik’, R.C.Hibbeler, S.C.Fan, Çevirenler: A. Soyuçok, Ö. Soyuçok.

16 Rijit Cismin Düzlemsel Kinematiği

Bu bölümde, düzlemsel kinematik veya bir rijit cismin düzlemsel hareketinin geometrisi incelenecektir. Bu inceleme dişli ve kam gibi makine elemanlarında kullanılan mekanizmaların tasarımı için önemlidir.

Bir rijit cisim öteleme, sabit bir eksen etrafında dönme ve genel düzlemsel hareket olmak üzere üç tip düzlemsek hareket yapabilir.

Rijit cismin düzlemsel hareketi, cisim üzerindeki iki noktanın hareketi bilindiğinde tamamen belirlenebilir.

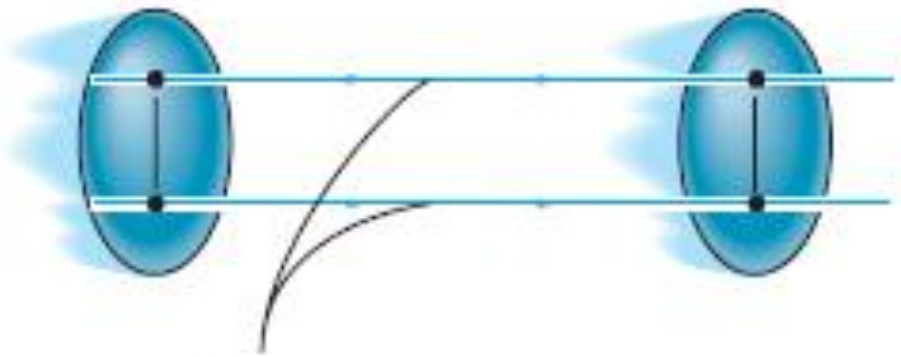
16.1 Rijit Cisim Hareketi

Rijit cismin bütün parçacıkları sabit bir düzlemden eşit uzaklıktaki yörüngeler boyunca hareket ediyorsa, cisim *düzlemsel hareket* yapıyor denir. Üç tür düzlemsel hareket vardır:

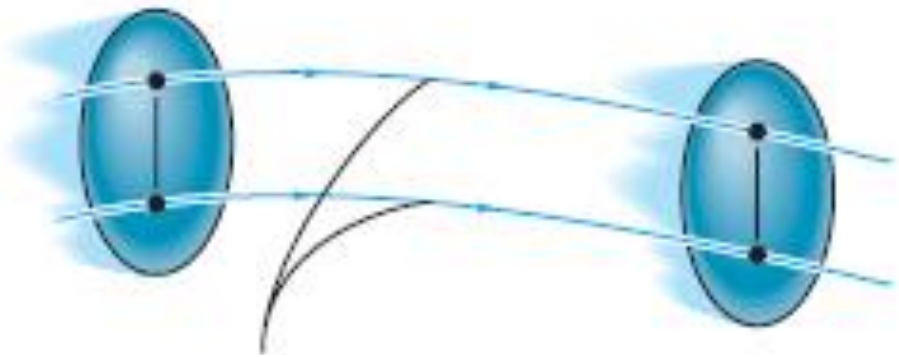
1. *Öteleme*
2. *Sabit bir eksen etrafında dönme*
3. *Genel düzlemsel hareket*

16.1 Rijit Cisim Hareketi

1. Öteleme. Cisim üzerindeki herhangi bir çizgi elemanı hareket esnasında başlangıçtaki doğrultusuna paralel kalırsa oluşur.
Herhangi iki parçacığın hareket yörüngesi eşit uzaklıklı doğrular ise harekete *doğrusal öteleme*, eşit uzaklıklı eğriler ise *eğrisel öteleme* denir.



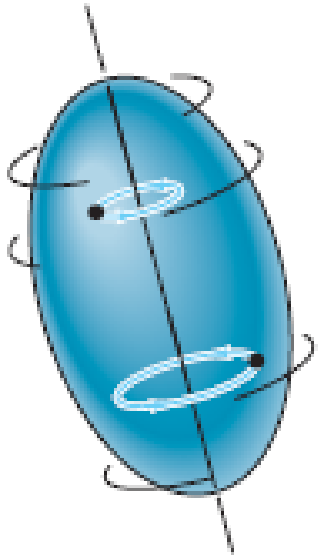
Doğrusal öteleme yörüngesi



Eğrisel öteleme yörüngesi

16.1 Rijit Cisim Hareketi

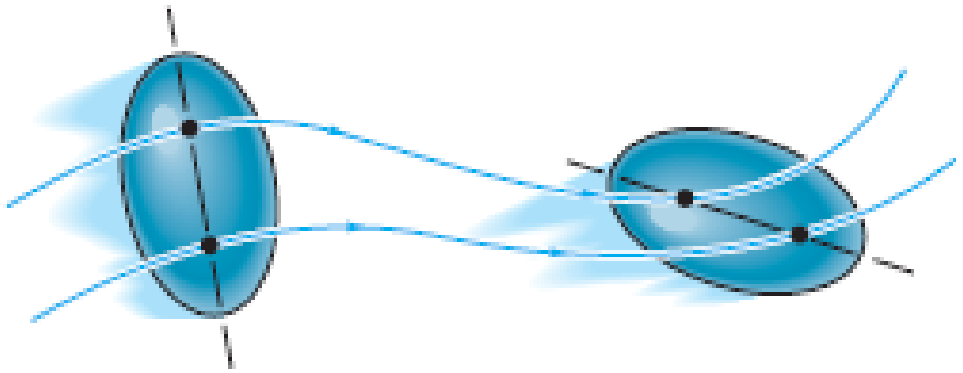
2. Sabit bir eksen etrafında dönme. Dönme ekseni üzerinde bulunanlar dışında, cismin bütün parçacıkları dairesel yörüngeler boyunca hareket eder.



Sabit bir eksen etrafında dönme

16.1 Rijit Cisim Hareketi

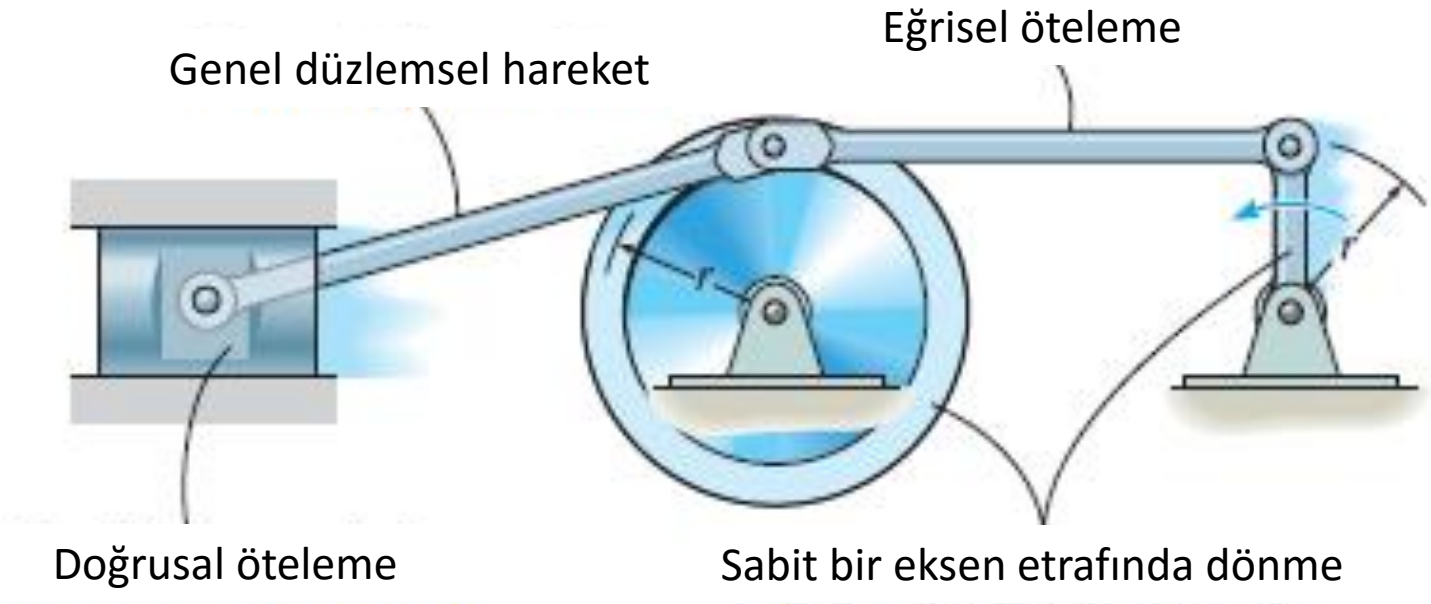
3. Genel düzlemsel hareket. Cismin hareketi, öteleme ve dönme hareketlerinin bileşimidir. Öteleme referans düzlemi içinde, dönme ise referans sistemine dik bir eksen etrafında gerçekleşir.



Genel düzlemsel hareket

16.1 Rijit Cisim Hareketi

Krank mekanizmasının hareketli parçaları, düzlemsel hareketlere örnek oluşturmaktadır.

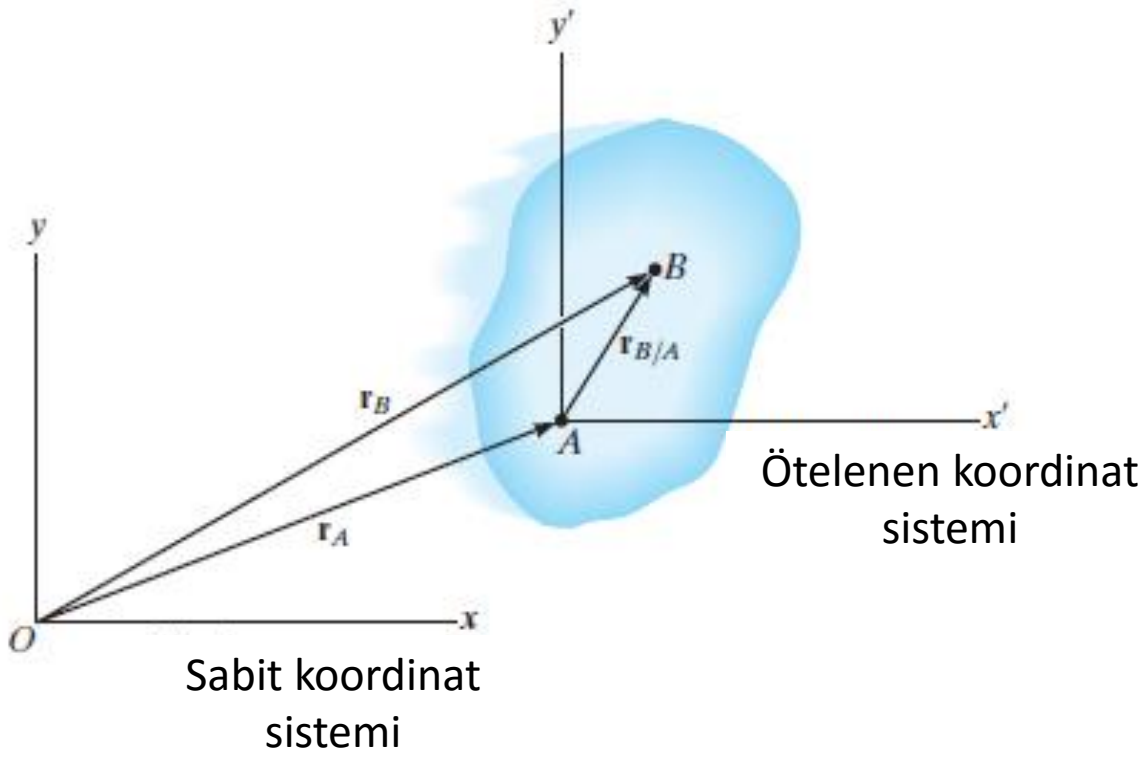


16.1 Rijit Cisim Hareketi

Bir eğrisel öteleme örneği. Araç dairesel bir yörüngede hareket etmesine rağmen hareket boyunca yatay düzleme paralel kalır.

16.2 Öteleme

x-y düzleminde doğrusal veya eğrisel öteleme hareketi yapan bir rijit cismi ele alalım.

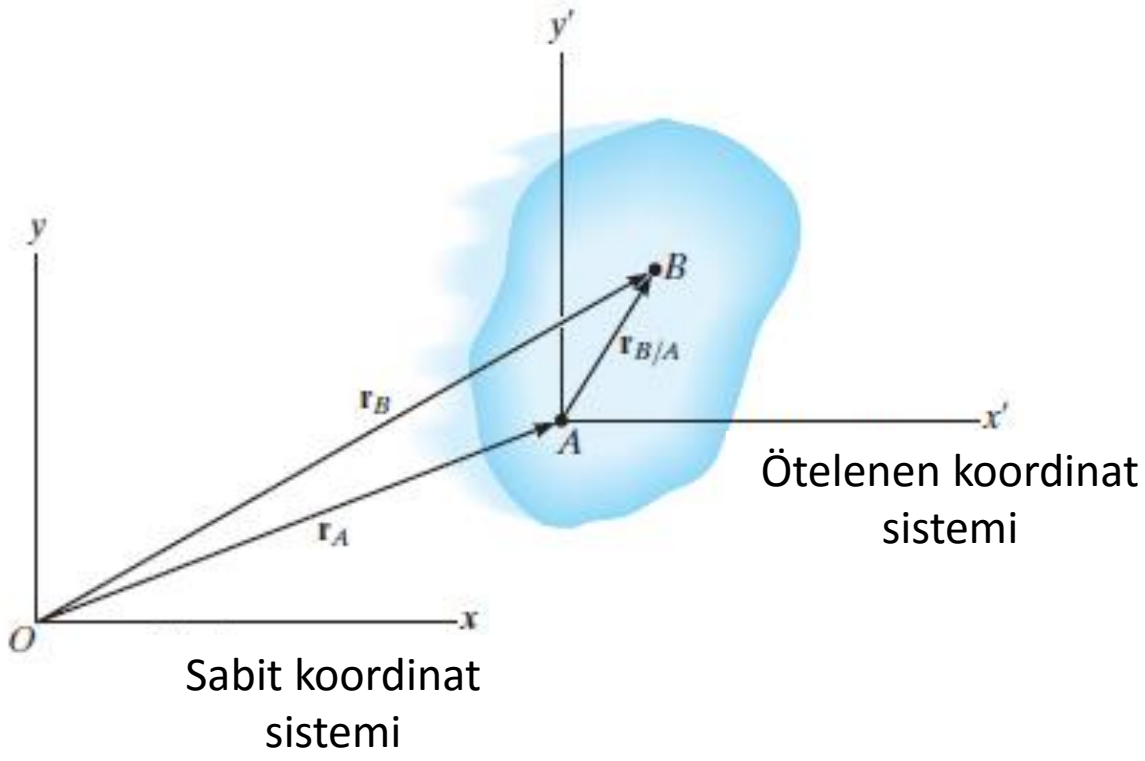


Konum. *A* ve *B* noktalarının konumları, sabit *x-y* referans sisteminde $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ konum vektörleri ile tanımlanır. Ötelenen *x'-y'* koordinat sistemi cisimde sabittir ve orijini ***taban noktası*** *A*'da bulunmaktadır.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

16.2 Öteleme

x-y düzleminde doğrusal veya eğrisel öteleme hareketi yapan bir rijit cismi ele alalım.



Hız. Konum denkleminin zamana göre türevi alınarak hızlar belirlenir.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

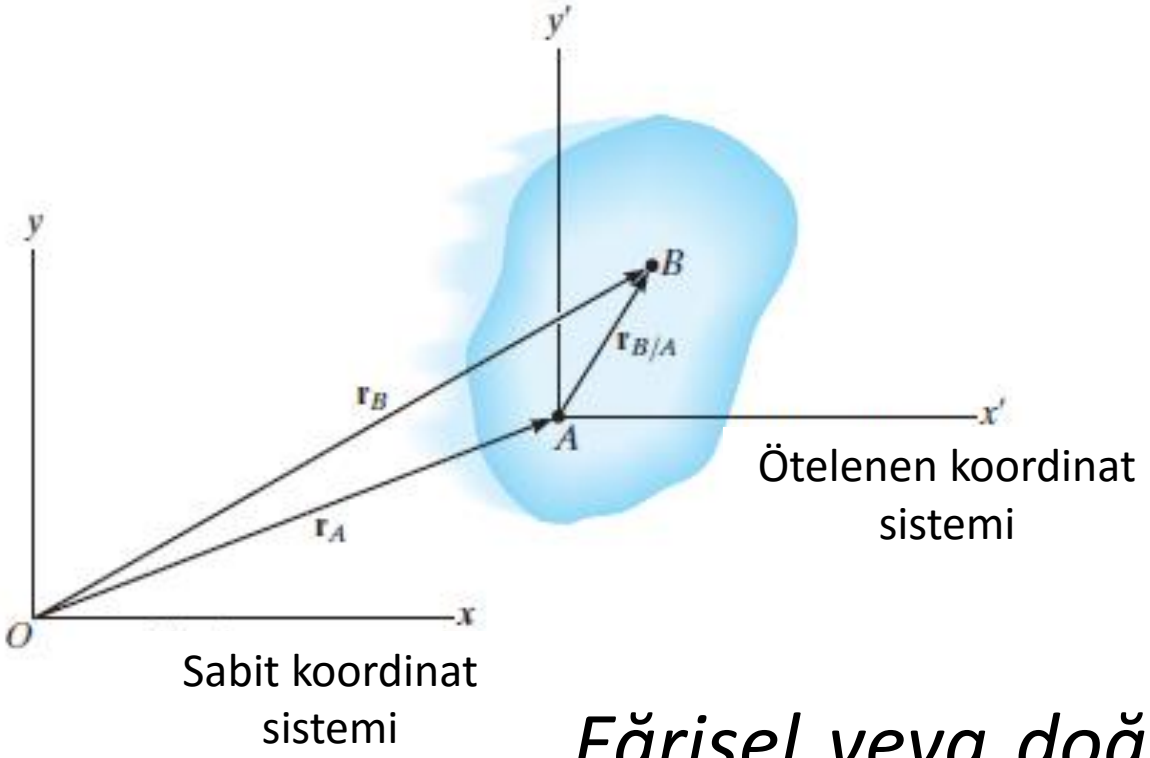
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt.$$

$$d\mathbf{r}_{B/A}/dt = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

16.2 Öteleme

x-y düzleminde doğrusal veya eğrisel öteleme hareketi yapan bir rijit cismi ele alalım.



İvme. Hız denkleminin zamana göre türevi alınarak *A* ve *B*'nin anlık ivmeleri arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

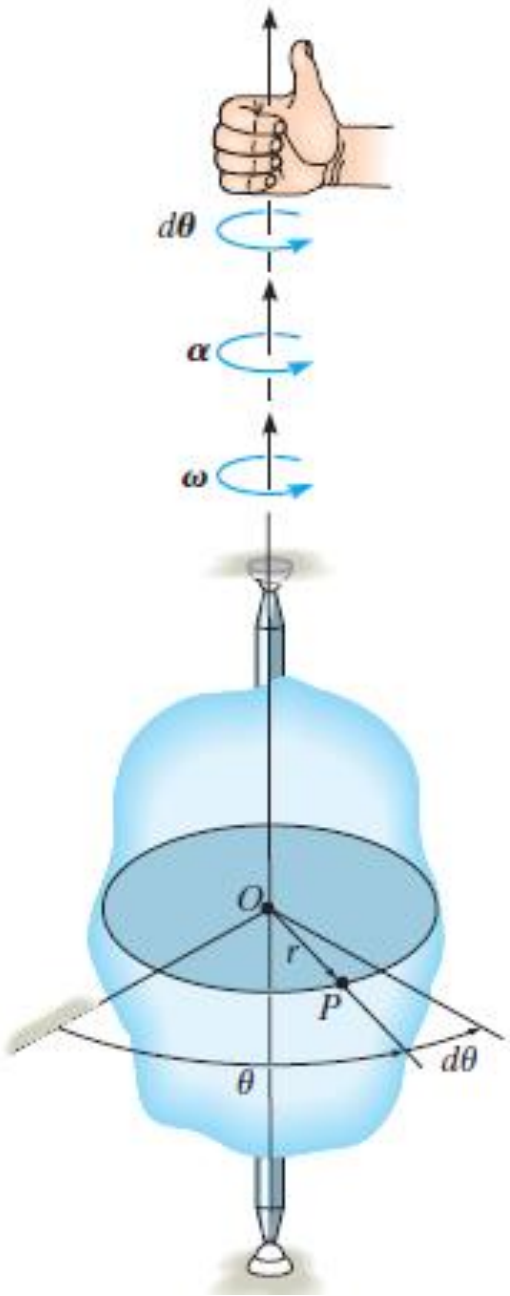
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Eğrisel veya doğrusal öteleme yapan bir rijit cismin bütün noktaları aynı hız ve ivme ile hareket eder.

16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Bir cisim sabit bir eksen etrafında döndüğünde, cismin herhangi bir *P* noktası dairesel bir yol boyunca hareket eder.
Bu hareket, cismin eksen etrafındaki açısal hareketine bağlıdır.
Bu nedenle, öncelikle cismin açısal hareketinin özellikleri incelenecektir.

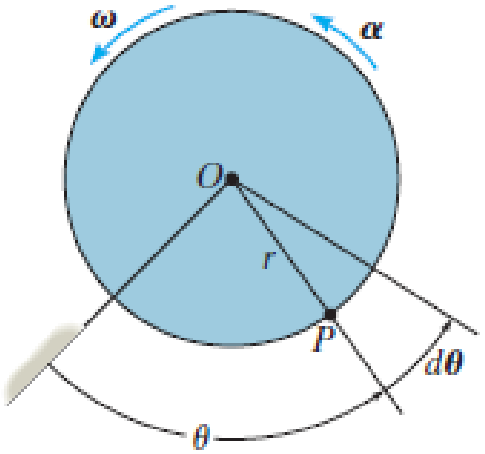
Açısal Hareket. Nokta boyutsuz olduğu için *sadece çizgiler ve cisimler açısal hareket yapar*.

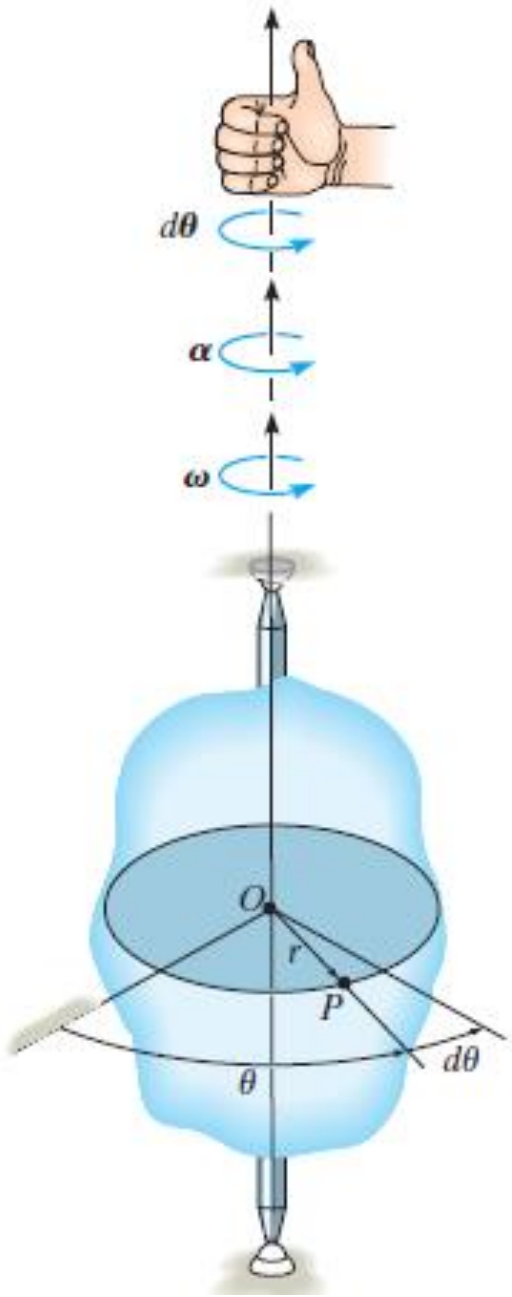


16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Açısal Konum. *r*'nin *açısal konumu*, sabit bir referans ekseni ve *r* ekseni arasındaki θ açısıyla tanımlanır. Burada *r*, dönme eksenine dik doğrultudadır.

Açısal Yer Değiştirme. Genellikle ***dθ*** ile ölçülen açısal konumdaki değişmeye açısal yer değiştirme denir. ***dθ***'nın yönü sağ el kuralı ile belirlenir.



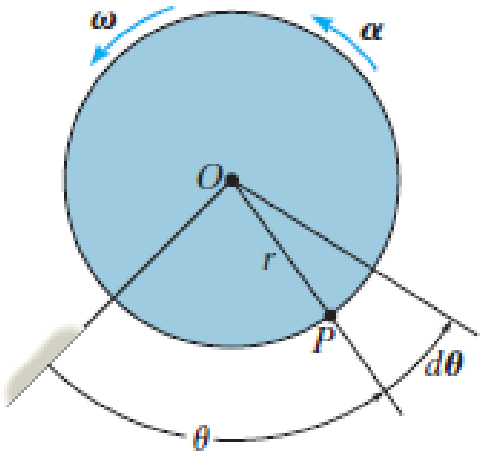


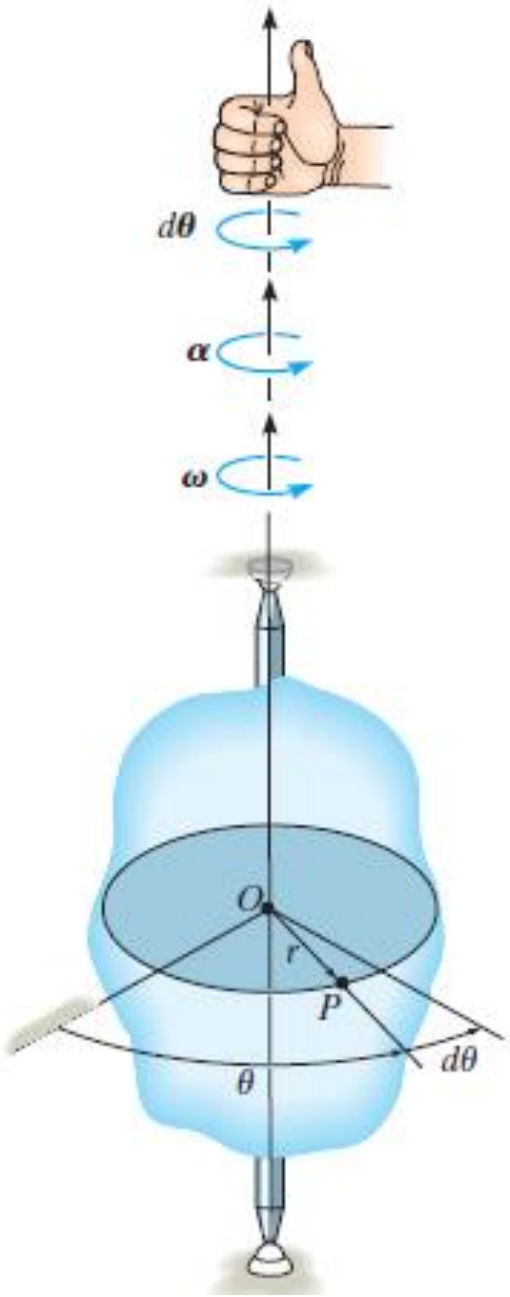
16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Açısal Hız. Açısal konumun zamana göre değişim oranına denir, ***ω*** (omega) ile gösterilir.

$$(\circlearrowleft +) \quad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Bu vektörün büyüklüğü genellikle rad/s ile ölçülür.





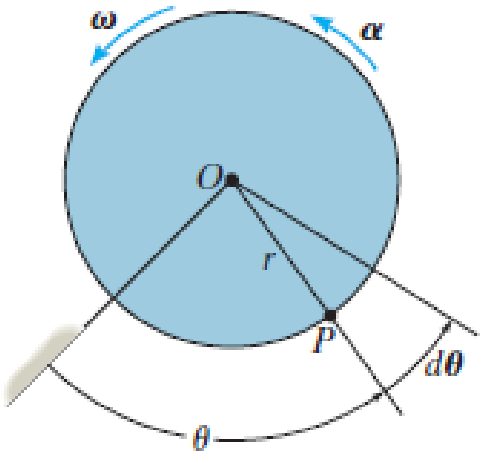
16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

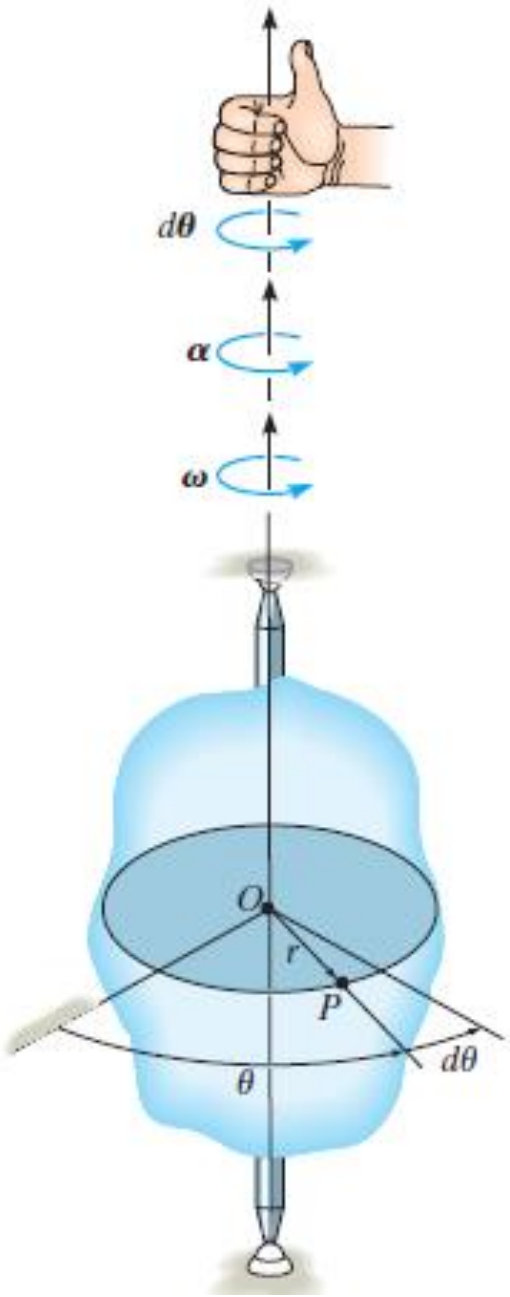
Açısal İvme. Açısal hızın zamana göre değişim oranına denir, ***α*** (alfa) ile gösterilir.

$$(\circlearrowleft +) \quad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$(\circlearrowleft +) \quad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

$$\boxed{\alpha \, d\theta = \omega \, d\omega}$$



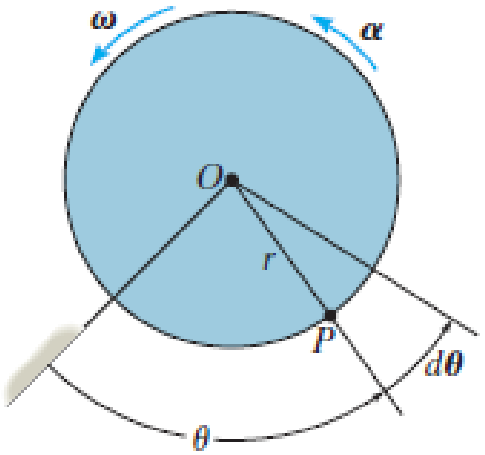


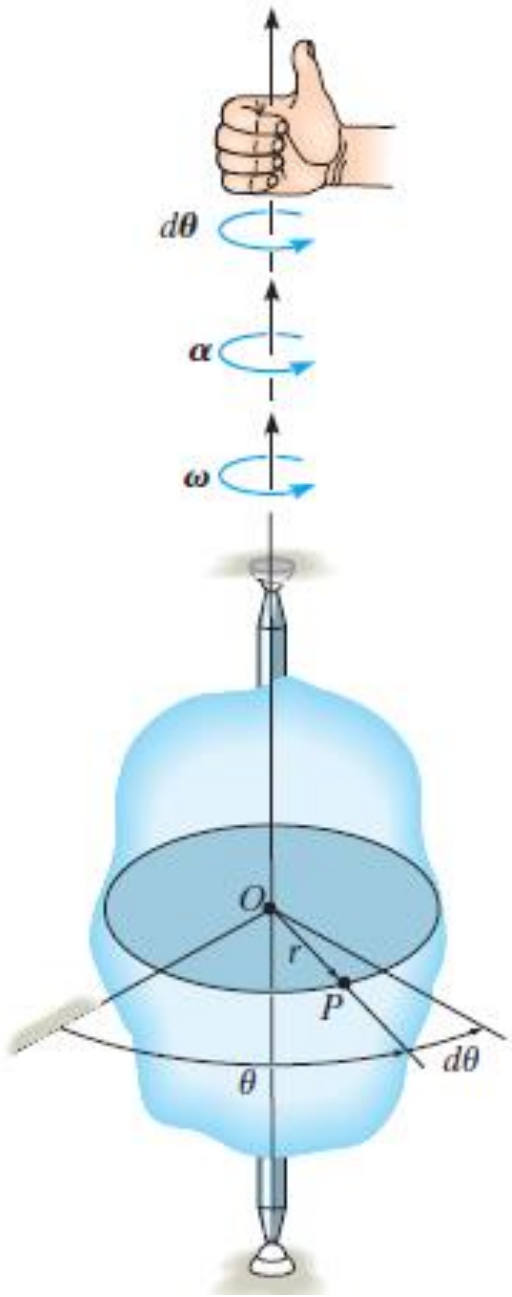
16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Sabit Açısal İvme. $\alpha = \alpha_c$ ise, doğrusal harekettekine benzer olan, cismin açısal hızını, açısal konumunu ve zamanı birbirine bağlayan bir denklem takımı elde edilir.

$$(\circlearrowleft +) \quad \omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$(\circlearrowleft +) \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$(\circlearrowleft +) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Sabit açısal ivme



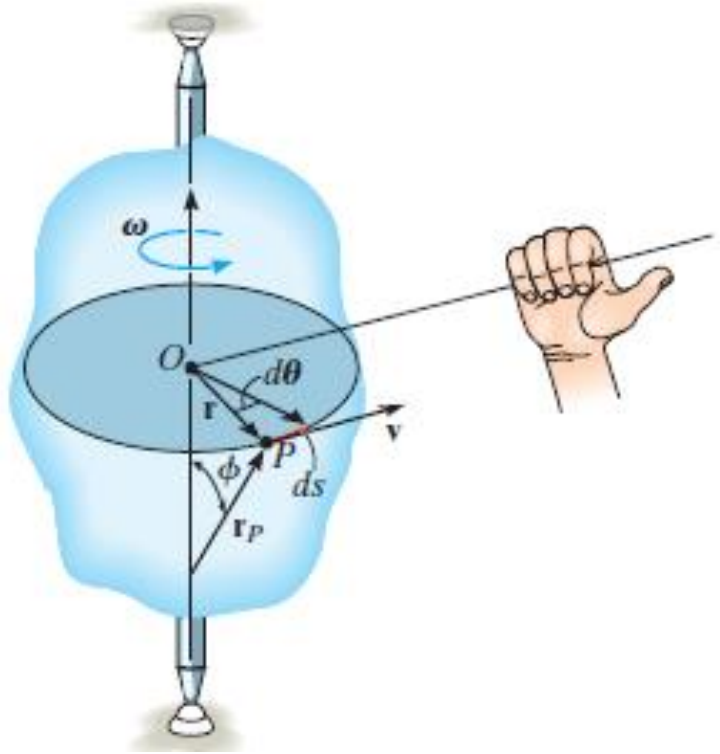


16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

P Noktasının Hareketi. *P* noktası *O* merkezli, *r* yarıçaplı bir dairesel yörüngede hareket eder.

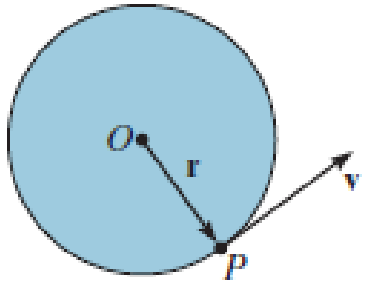
Konum. *P*'nin konumu, *O*'dan *P*'ye uzanan **r** konum vektörü ile tanımlanır. $ds = r\,d\theta.$

Hız. *ds*'nin zamana göre türevi ile belirenebilir.



$$v = \omega r$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$



16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

İvme. İvme, normal ve teğetsel bileşenler cinsinden ifade edilecektir.

$$a_t = dv/dt \qquad a_n = v^2/\rho, \qquad \rho = r,\ v = \omega r, \text{ and } \alpha = d\omega/dt.$$

$$\boxed{a_t = \alpha r} \qquad \boxed{a_n = \omega^2 r}$$

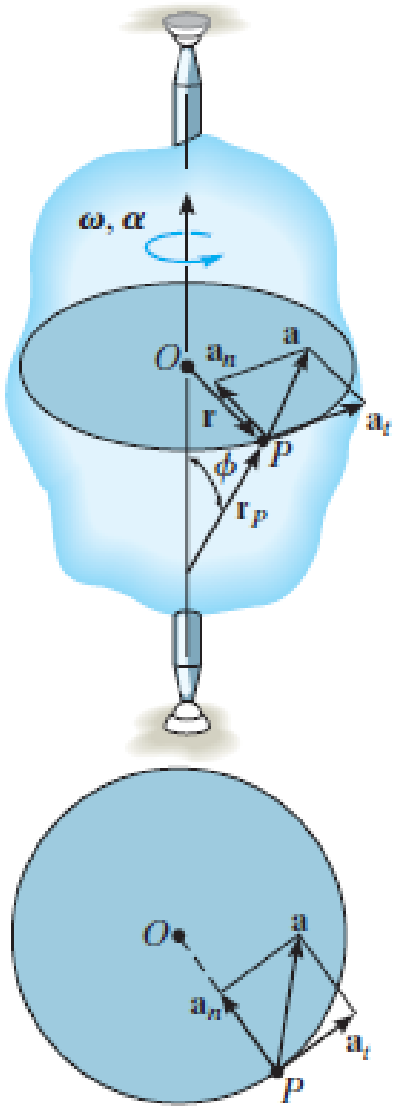
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt,$$

$$(d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

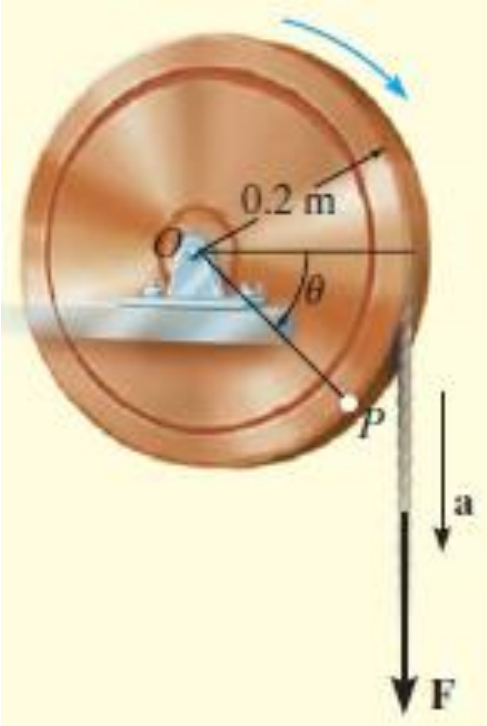
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}}$$



16.3 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

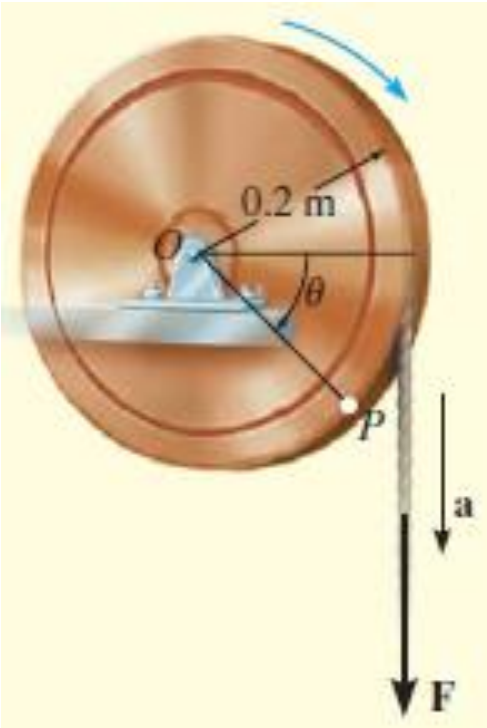
Bir vinçte kullanılan dişlilerin hepsi sabit eksenler etrafında döner. Mühendisler, dişli sistemini tasarlayabilmek için bunların açısal hareketleri arasındaki ilişkiyi belirlemelidir.

Örnek 16-1



Başlangıçta hareketsiz duran tekerlek etrafında bir ip sarılıdır. İpe, a = (4t) m/s^2 ivmesi veren bir kuvvet uygulandığına göre, (a) tekerleğin açısal hızını, (b) *OP* çizgisinin radyan cinsinden ölçülen açısal konumunu zamanın fonksiyonu olarak belirleyiniz.

Örnek 16-1



(a)

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$

$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$

$$\alpha = (20t)\ \text{rad/s}^2 \circlearrowleft$$

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t 20t\ dt$$

$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \circlearrowleft$$

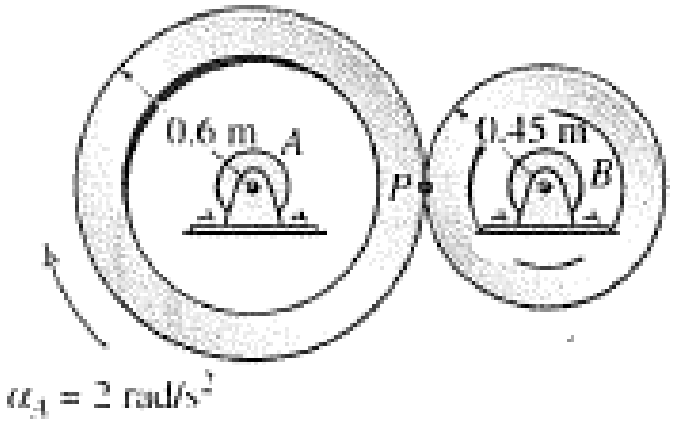
(b)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t 10t^2\ dt$$

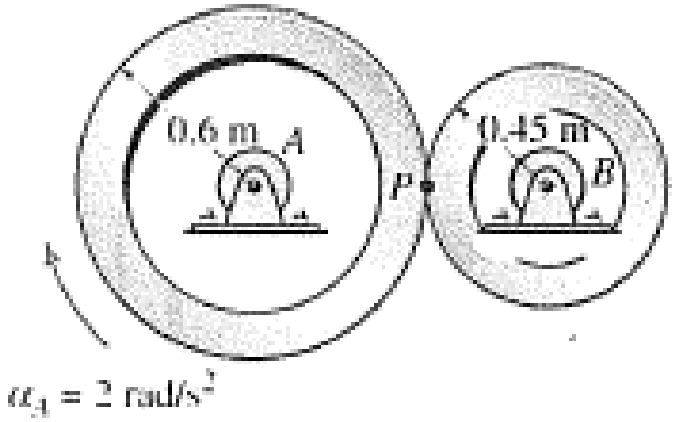
$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad}$$

Örnek 16-2



A diski durağan halden başlayarak bir motor vasıtası ile $\alpha_A = 2$ rad/s^2'lik sabit bir açısal ivme ile döndürülüyor. Diskler arasında herhangi bir kayma olmadığına göre, *A* diski 10 devir yaptıktan hemen sonra *B* diskinin açısal hız ve açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-2

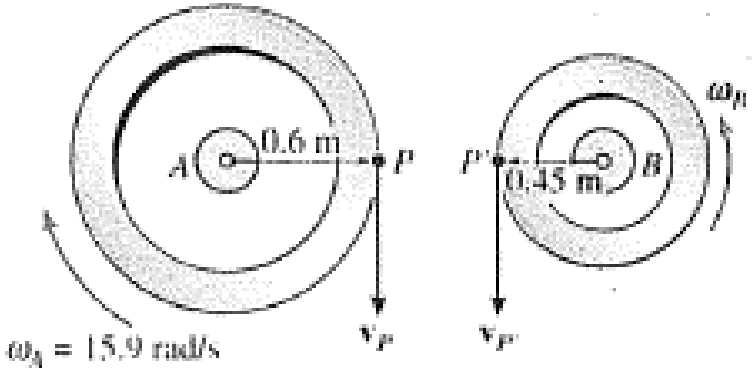


$$\theta_A = 10 \text{ dev}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ dev}}\right) = 62.83 \text{ rad}$$

$$(\uparrow +) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

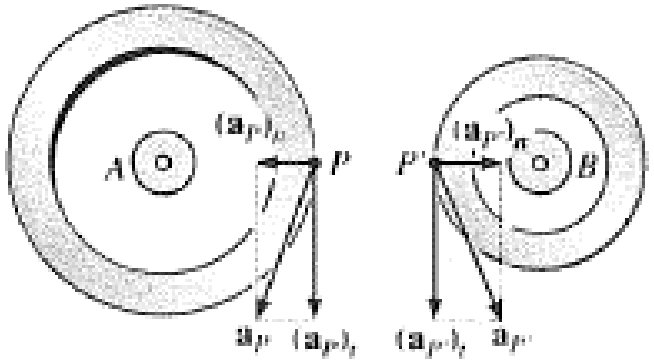
$$\omega_A^2 = 0 + 2(2 \text{ rad/s}^2)(62.83 \text{ rad} - 0)$$

$$\omega_A = 15.9 \text{ rad/s} \downarrow$$



$$(+\downarrow) \quad v_P = \omega_A r_A = (15.9 \text{ rad/s})(0.6 \text{ m}) = 9.54 \text{ m/s} \downarrow$$

$$(\downarrow +) \quad \omega_B = \frac{v_{P'}}{r_B} = \frac{9.54 \text{ m/s}}{0.45} = 21.2 \text{ rad/s} \uparrow$$



$$(a_P)_t = (a_{P'})_t$$

$$\alpha_A r_A = \alpha_B r_B$$

$$\alpha_B = \alpha_A\left(\frac{r_A}{r_B}\right) = 2\left(\frac{0.6 \text{ m}}{0.45 \text{ m}}\right) = 2.67 \text{ rad/s}^2 \uparrow$$

16.4 Mutlak Genel Düzlemsel Hareket Analizi

Genel düzlemsel hareket yapan bir cisim, aynı anda hem öteleme hem dönme hareketi yapar.

Bu hareketi tanımlamanın bir yolu, yörüngesi boyunca bir noktanın konumunu belirlemek için *s* konum koordinatını ve çizginin yönelimini belirlemek için θ açısal konum koordinatlarını kullanmaktır.

Daha sonra, problemin geometrisi kullanılarak bu koordinatlar arasında bağıntı kurulur.

Zaman değişkenli $v=ds/dt$, $a=dv/dt$, $\omega=d\theta/dt$ ve $\alpha=d\omega/dt$'nin uygulanması ile, noktanın hareketi ve çizginin açısal hareketi arasında bağıntı kurulabilir.

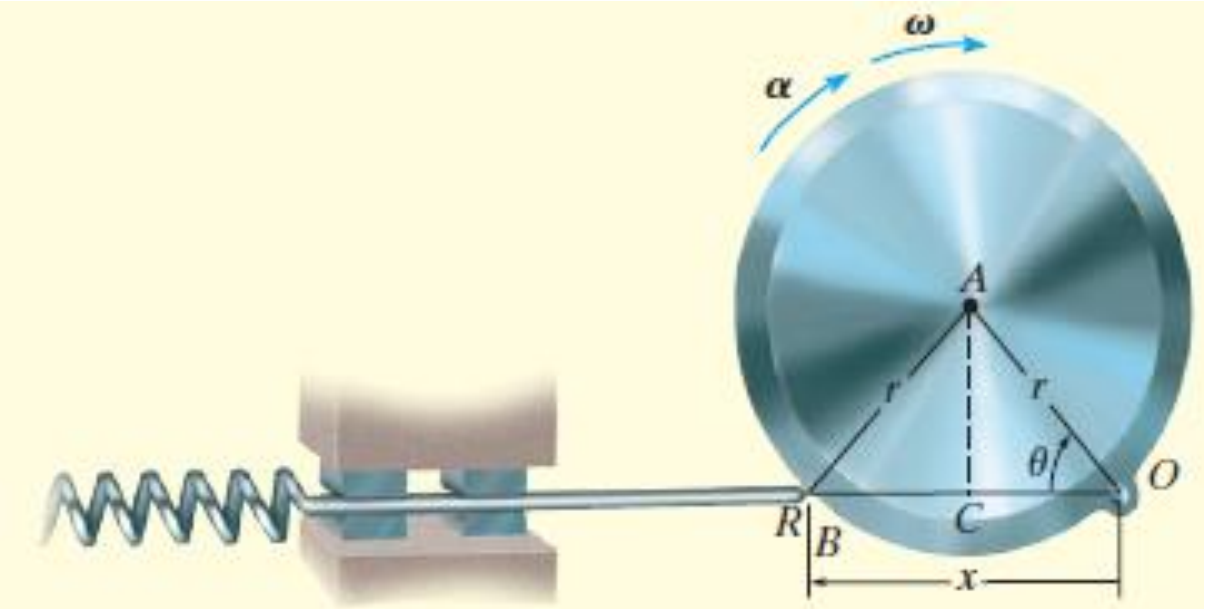
16.4 Mutlak Genel Düzlemsel Hareket Analizi

Araç üzerindeki kova, *A* noktasından geçen sabit bir eksen etrafında dönmektedir. Hareket *BC* silindirinin uzaması ile sağlanmaktadır. Kovanın açısal konumu θ ile, *C* noktasının konumu *s* konum koordinatı ile belirlenebilir. *a* ve *b* uzunlukları sabit olduğundan, *s* ve θ arasında kosinüs kuralı yazılabilir:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.$$

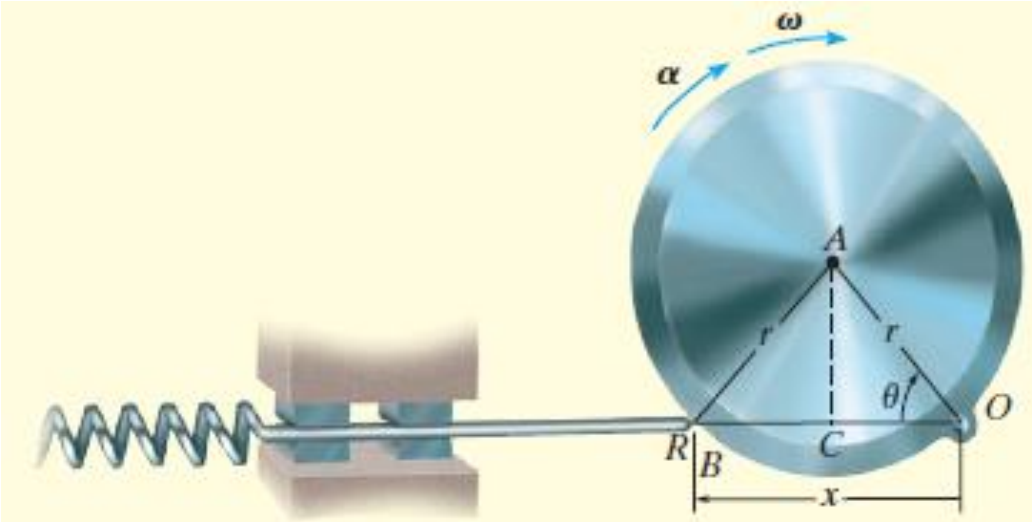
Bu denklemin zamana göre türevi, silindirin uzama hızı ile kovanın açısal hızını birbirine bağlar.

Örnek 16-3



R çubuğunun ucu bir yay vasıtasıyla kamla temasını sürdürmektedir. Kam, bir *α* açısal ivmesi ve *ω* açısal hızı ile *O* noktasından geçen bir eksen etrafında döndüğüne göre, kam keyfi bir θ konumunda iken, çubuğun hız ve ivmesini hesaplayınız.

Örnek 16-3



Konum-Koordinat Denklemi.

$$OC = CB = r\cos\theta,$$

$$x = 2r\cos\theta$$

Zamana Göre Türevler.

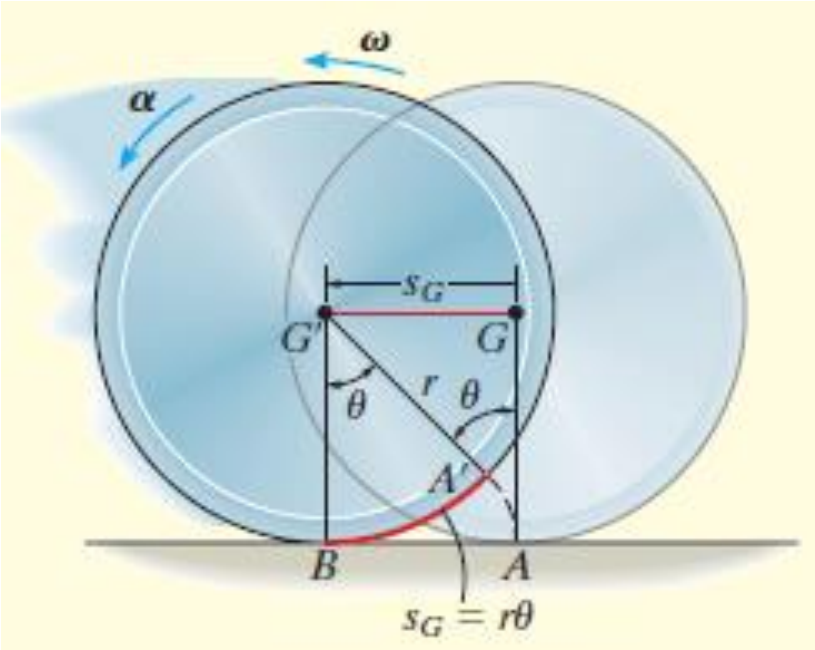
$$\frac{dx}{dt} = -2r(\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\sin\theta$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\sin\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

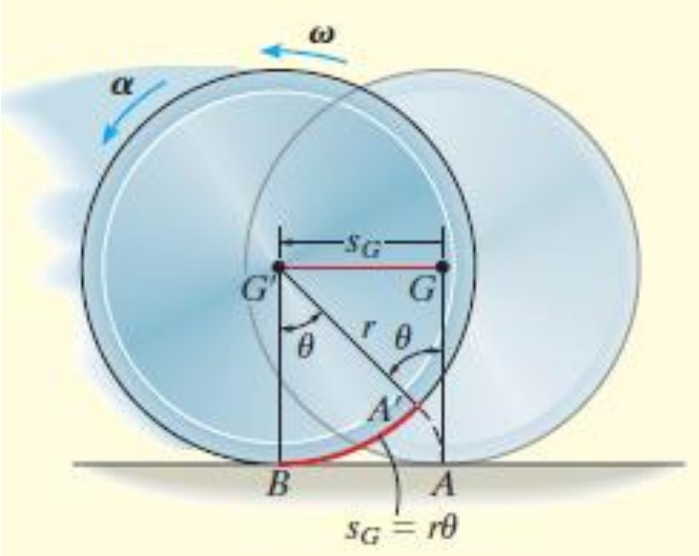
$$a = -2r(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)$$

Örnek 16-4



r yarıçaplı silindir, verilen bir anda, ***ω*** açısal hızına ve ***α*** açısal ivmesine sahiptir. Silindir, kaymadan yuvarlandığına göre, *G* merkezinin hız ve ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-4



Konum-Koordinat Denklemi.

$$A'B = r\theta, \qquad s_G = r\theta$$

Zamana Göre Türevler.

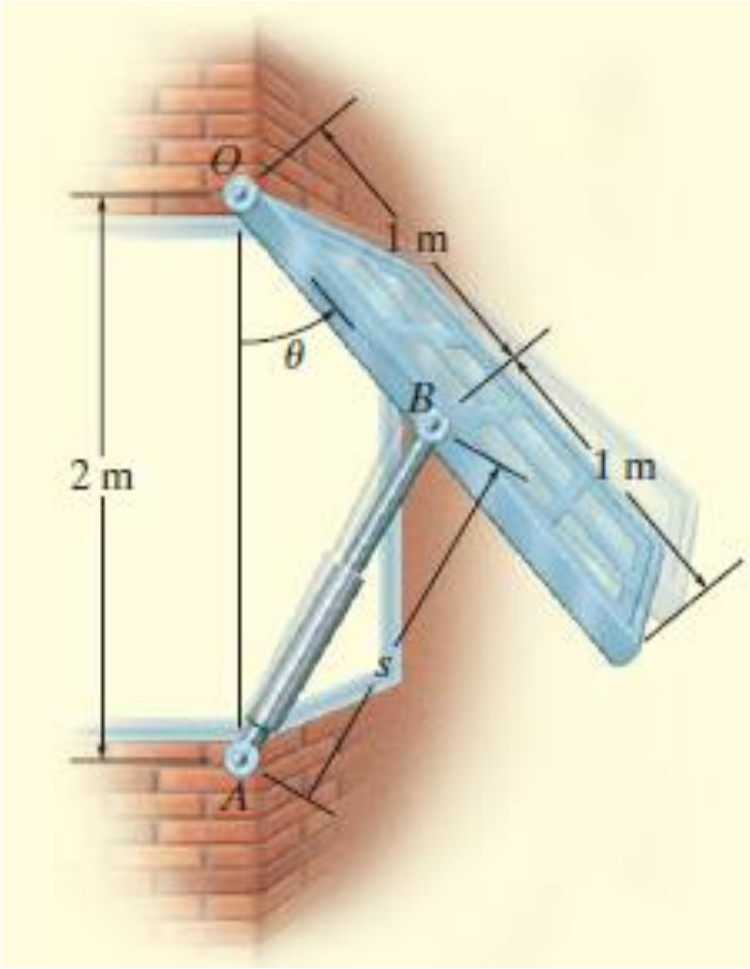
$$\omega = d\theta/dt, \qquad \alpha = d\omega/dt,$$

$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega$$

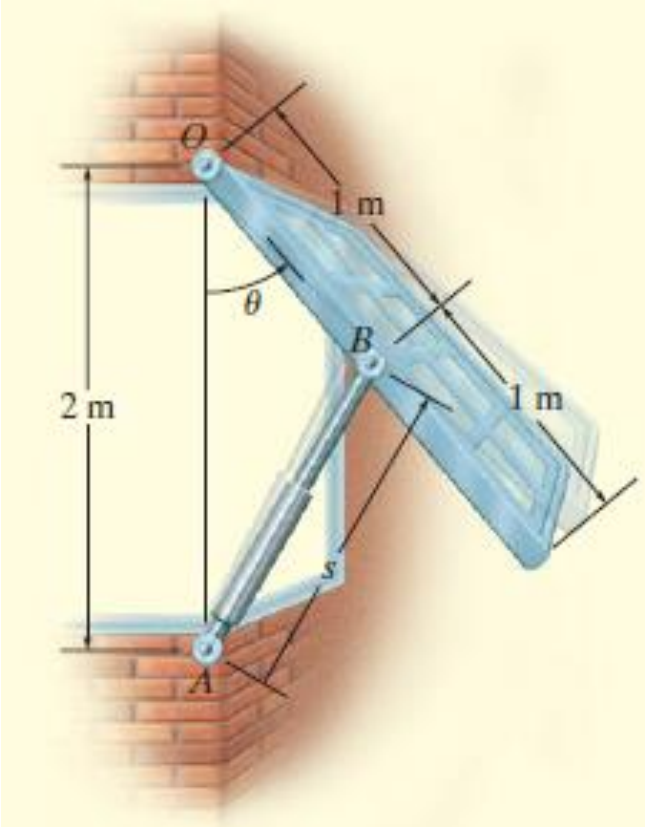
$$a_G = r\alpha$$

Örnek 16-5



Geniş bir pencere *AB* hidrolik silindiri kullanılarak açılmaktadır. Silindir, 0.5 m/s'lik bir sabit hızla uzadığına göre, θ=30˚ olduğu anda pencerenin açısal hız ve açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-5



Konum-Koordinat Denklemi.

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta$$

$\theta = 30°,$

$$s = 1.239\text{ m}$$

Zamana Göre Türevler.

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\sin\theta)\omega$$

$v_s = 0.5\text{ m/s},$

$\theta = 30°,$

$$(1.239\text{ m})(0.5\text{ m/s}) = 2\sin 30°\omega$$

$$\omega = 0.6197\text{ rad/s} = 0.620\text{ rad/s}$$

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\sin\theta)\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\sin\theta)\alpha$$

$$a_s = dv_s/dt = 0,$$

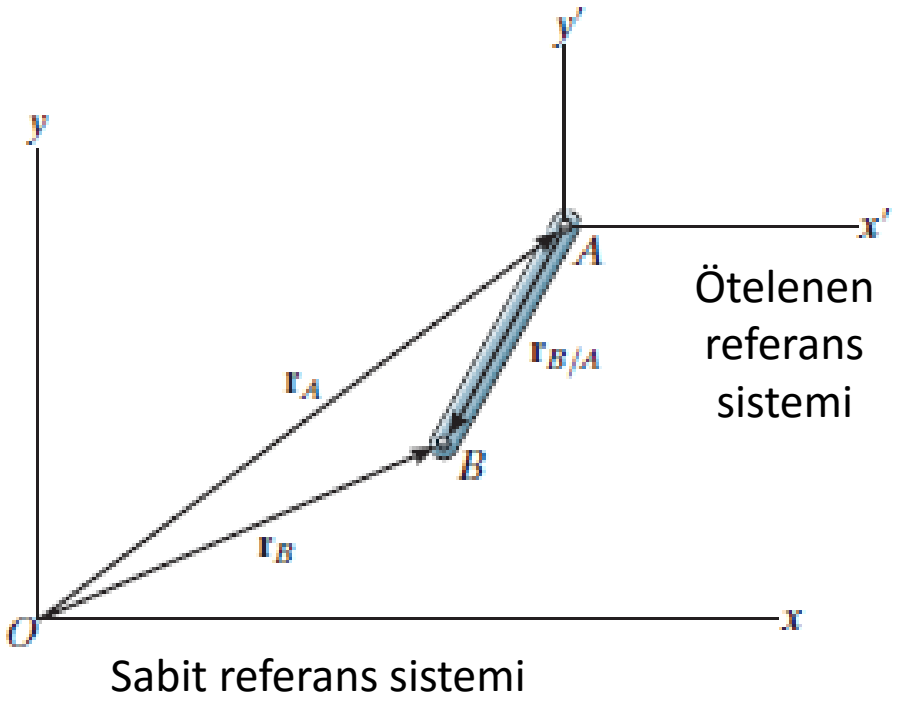
$$(0.5\text{ m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0.6197\text{ rad/s})^2 + 2\sin 30°\alpha$$

$$\alpha = -0.415\text{ rad/s}^2$$

16.5 Bağıl Hareket Analizi: Hız

Rijit cismin genel düzlemsel hareketinin öteleme ve dönmenin bileşiminden oluştuğunu biliyoruz. Çoğu kez, bu hareketin bileşenlerini ayrı incelemek daha uygun olur. Bunun için iki eksen takımı ile bağıl hareket analizi yapılır.

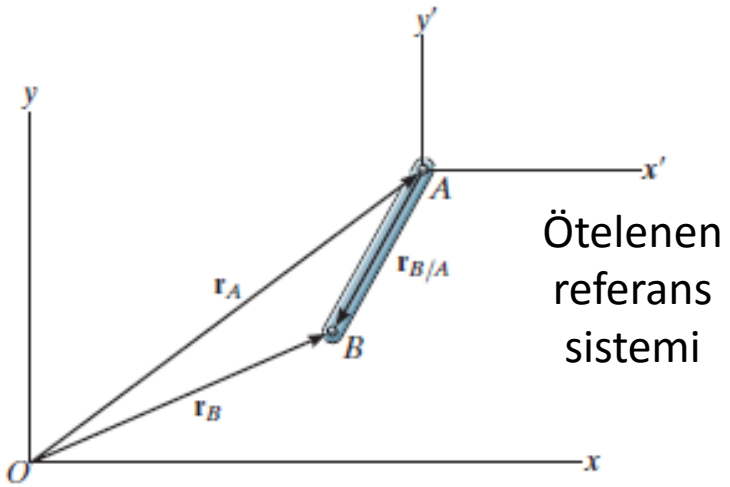
A ve *B* noktalarının mutlak konum, hız ve ivmeleri *x*-*y* referans sisteminden ölçülür. *x'*-*y'* sisteminin orijini, hareketi bilinen bir *A* taban noktasına yerleştirilir. *x'*-*y'* eksenleri *x*-*y*'ye göre ötelenir ama cisimle birlikte dönme hareketi yapmaz.



16.5 Bağıl Hareket Analizi: Hız

Konum.

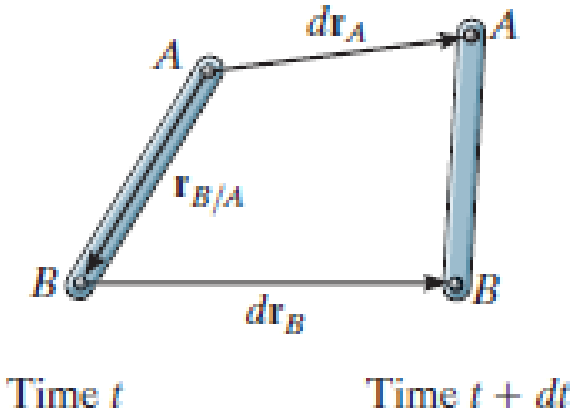
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$



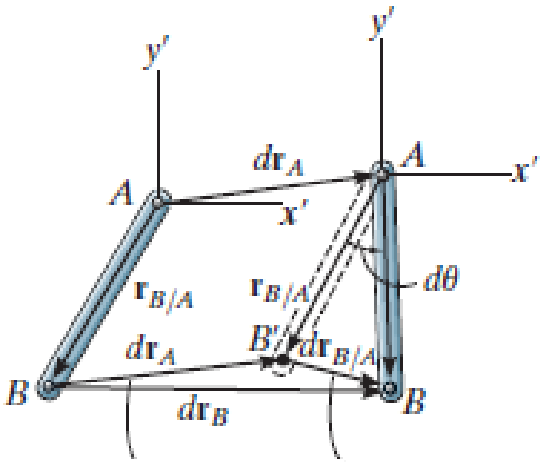
Ötelenen referans sistemi

Sabit referans sistemi

Yer Değiştirme.



Genel düzlemsel hareket



Öteleme

Dönme

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

A etrafında dönme

öteleme

öteleme ve A etrafında dönme

16.5 Bağıl Hareket Analizi: Hız

Hız.

Yer değiştirme denklemi *dt* ile bölünerek hız ifadesi elde edilebilir:

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

v_A ve v_B, sabit *x-y* eksenlerinden ölçülür ve *A* ve *B* noktalarındaki mutlak hızları gösterir.

$$dr_{B/A} = r_{B/A}\, d\theta, \qquad dr_{B/A}/dt = r_{B/A}\, d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega, \qquad v_{B/A} = \omega r_{B/A}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}}$$

$\mathbf{v}_B$ = *B* noktasının hızı

$\mathbf{v}_A$ = *A* taban noktasının hızı

$\mathbf{v}_{B/A}$ = "*B*'nin *A*'ya göre" bağıl hızı

16.5 Bağıl Hareket Analizi: Hız

Hız.

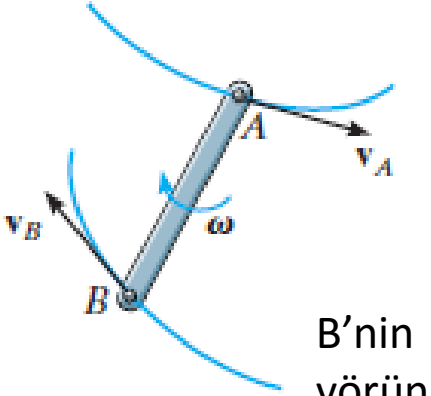
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$\mathbf{v}_B$ = B noktasının hızı

$\mathbf{v}_A$ = A taban noktasının hızı

$\mathbf{v}_{B/A}$ = "B'nin A'ya göre" bağıl hızı

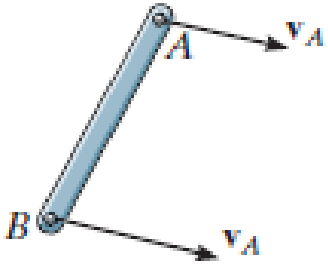
A'nın yörüngesi



B'nin yörüngesi

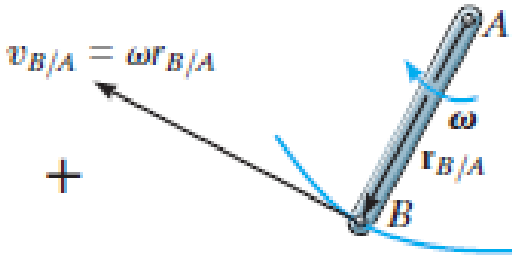
Genel düzlemsel hareket

=

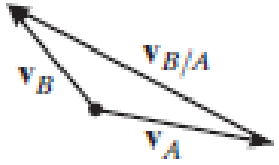


Öteleme

+



A taban noktası etrafında dönme



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$\mathbf{v}_B$ = B'nin hızı

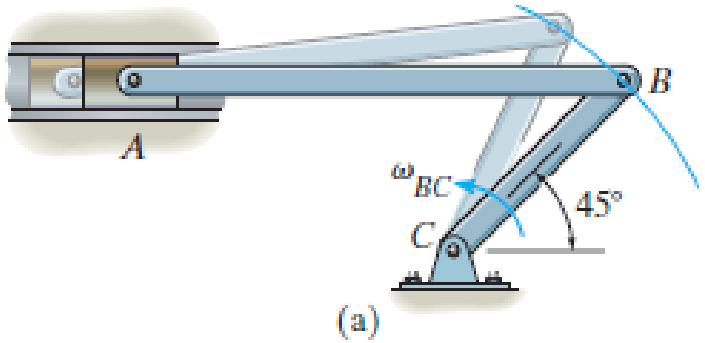
$\mathbf{v}_A$ = A taban noktasının hızı

$\boldsymbol{\omega}$ = cismin açısal hızı

$\mathbf{r}_{B/A}$ = A'dan B'ye ölçülen bağıl konum vektörü

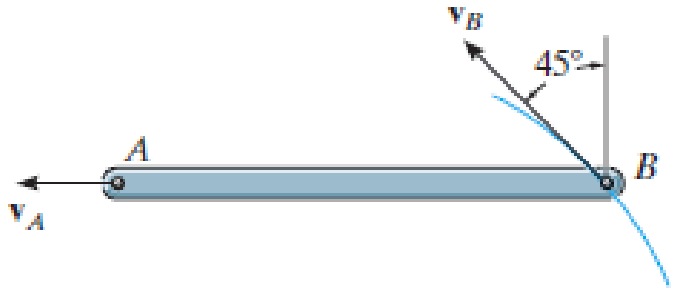
16.5 Bağıl Hareket Analizi: Hız

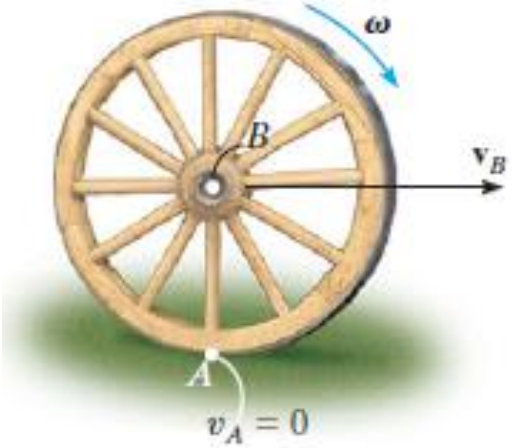
Hız.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

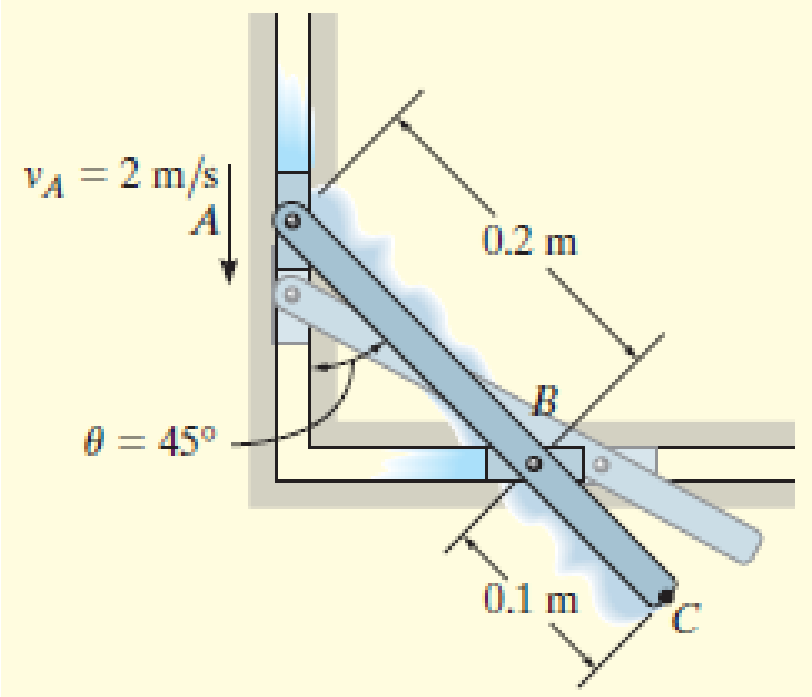




Bu denklemler, mafsallı veya diğer rijit cisimlerle temas eden cisimlerin düzlemsel hareketini incelemek için kullanılabilir.

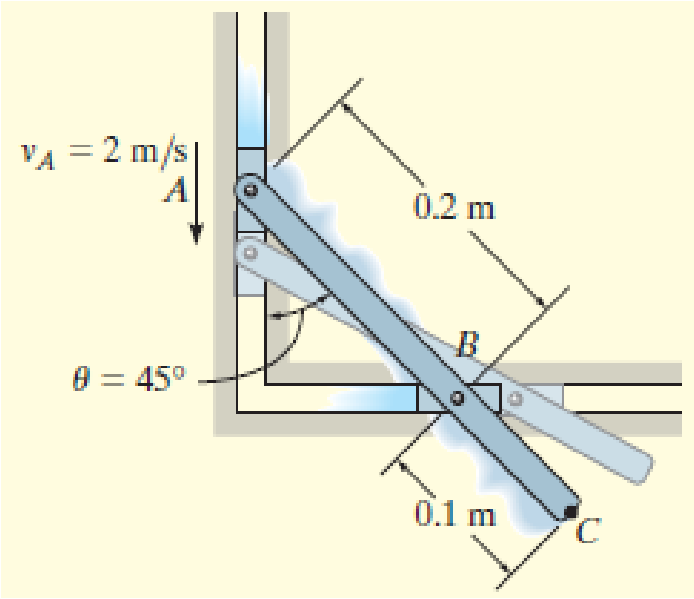
A ve *B* noktaları genellikle mafsal noktaları veya hareketi bilinen noktalar olarak seçilmelidir.

Örnek 16-6



Şekildeki bağlantı, sabit oluklarda hareket eden *A* ve *B*'deki iki blok tarafından hareket ettirilmektedir. *A*'nın hızı aşağı doğru 2 m/s olduğuna göre, θ=45˚ olduğu anda *B*'nin hızını belirleyiniz.

Örnek 16-6



Çözüm (Vektörel Analiz).

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

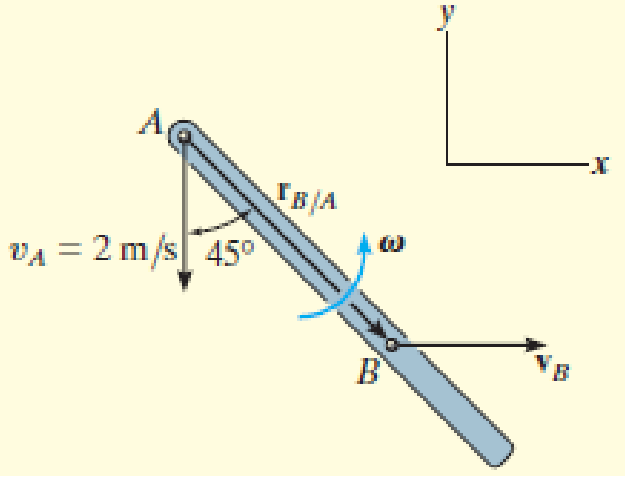
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \sin 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \sin 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

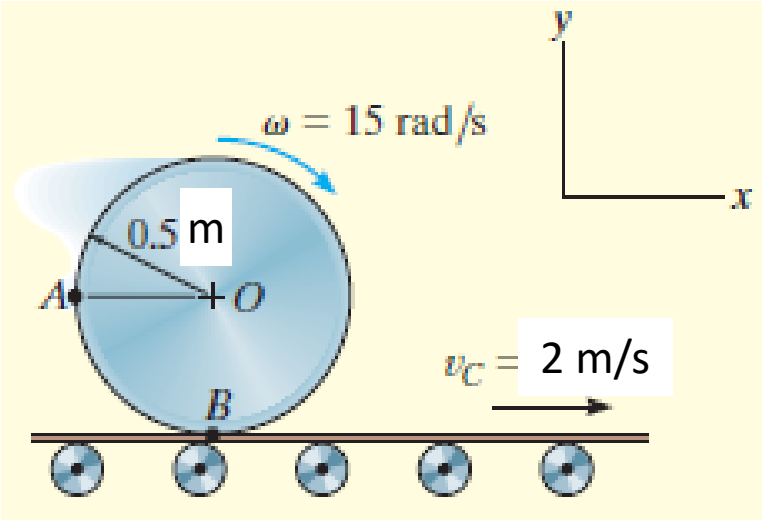
$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0.2\omega \sin 45°$$

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$



Örnek 16-7

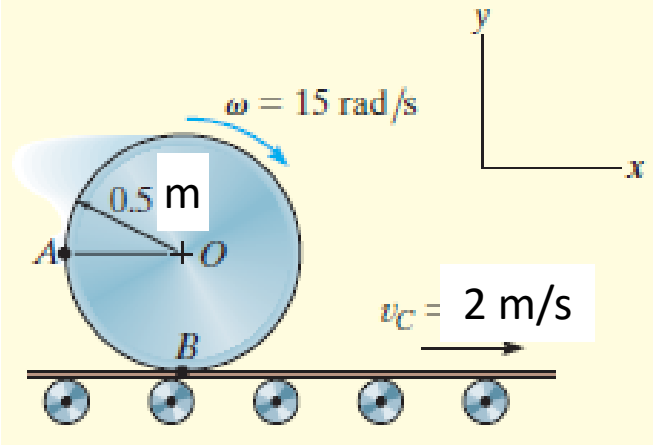


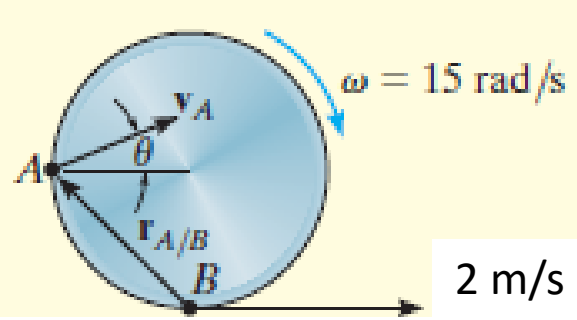
Şekildeki silindir, 2 m/s hızla hareket eden bir taşıyıcı bandın üzerinde, kaymaksızın serbestçe yuvarlanmaktadır.

Silindir, gösterilen anda ω=15 rad/s'lik saat yönlü bir açısal hıza sahip olduğuna göre, *A* noktasının hızını belirleyiniz.

Örnek 16-7

Çözüm (Vektörel Analiz).





$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ m/s}$$

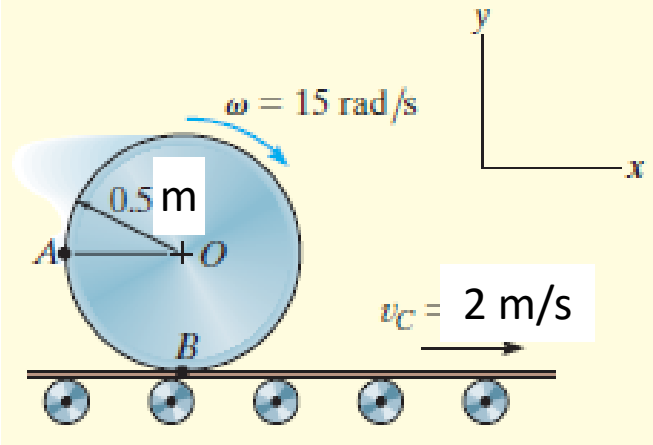
$$(v_A)_y = 7.50 \text{ m/s}$$

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3^\circ \quad \measuredangle$$

Örnek 16-7

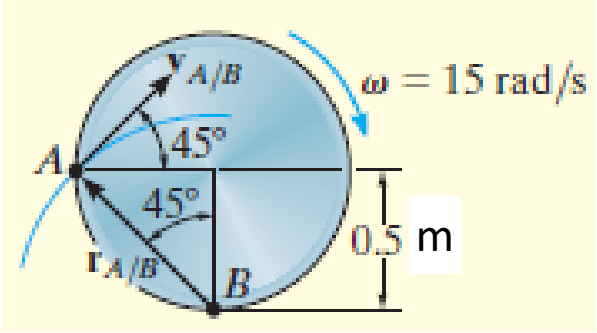
Çözüm (Skaler Analiz).



$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ m}}{\cos 45^\circ}\right) = 10.6 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

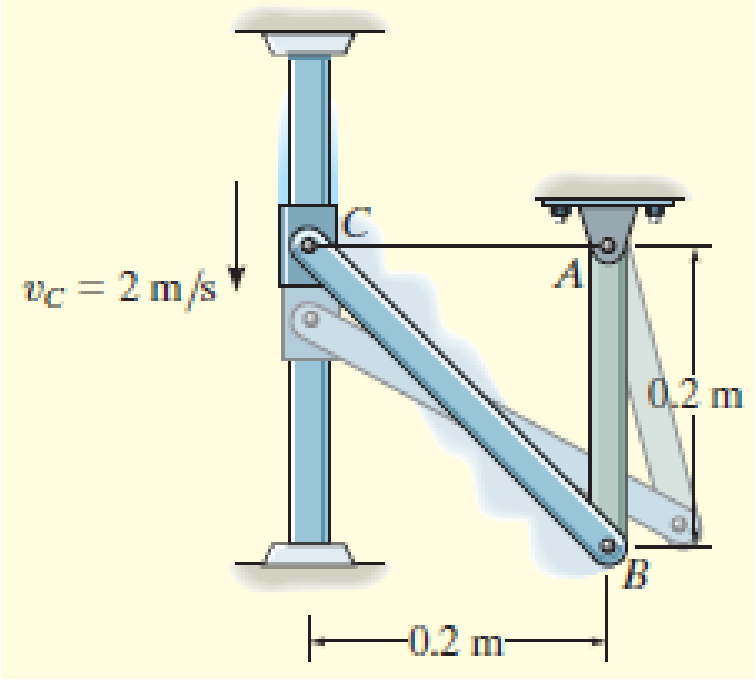
$$\begin{bmatrix} (v_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10.6 \text{ m/s} \\ \measuredangle 45^\circ \end{bmatrix}$$



$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45^\circ = 9.50 \text{ m/s}$$

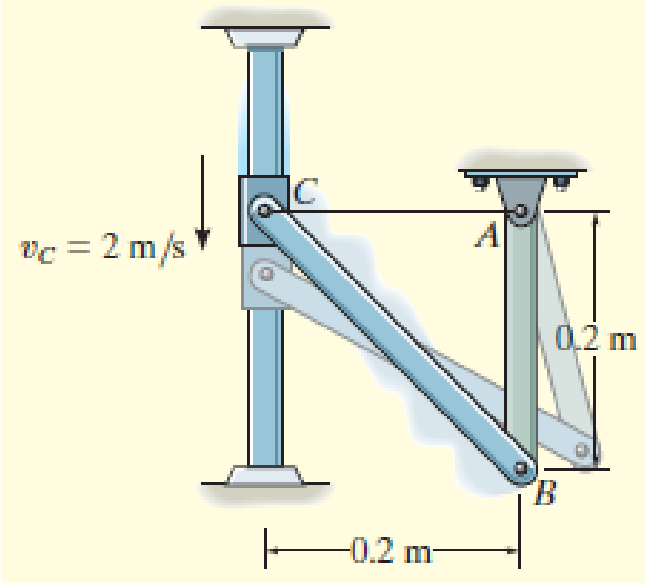
$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \sin 45^\circ = 7.50 \text{ m/s}$$

Örnek 16-8

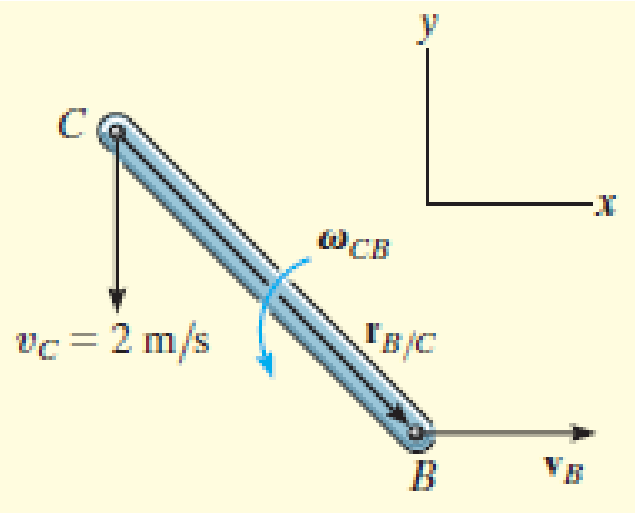


Şekildeki *C* bileziği, 2 m/s hızla aşağı doğru hareket etmektedir. *CB*'nin bu andaki açısal hızını belirleyiniz.

Örnek 16-8



Çözüm (Vektörel Analiz).



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

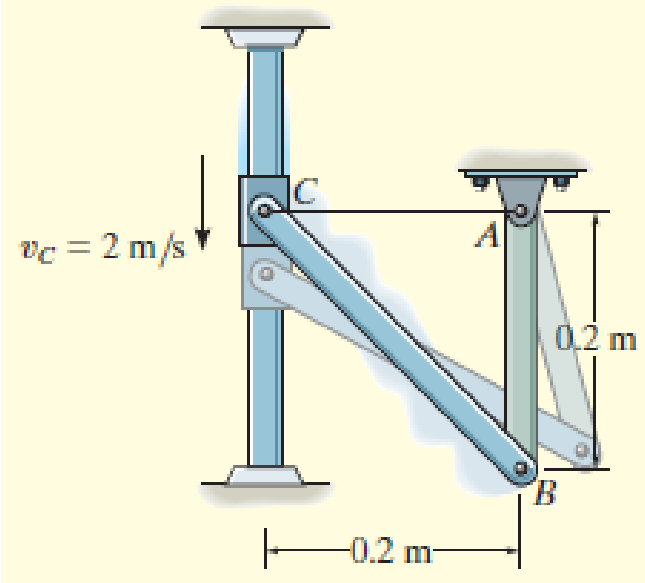
$$v_B = 0.2\omega_{CB}$$

$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB}$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

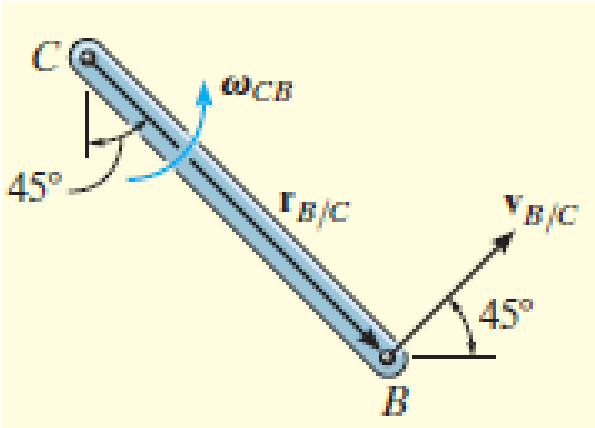
Örnek 16-8



Çözüm (Skaler Analiz).

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

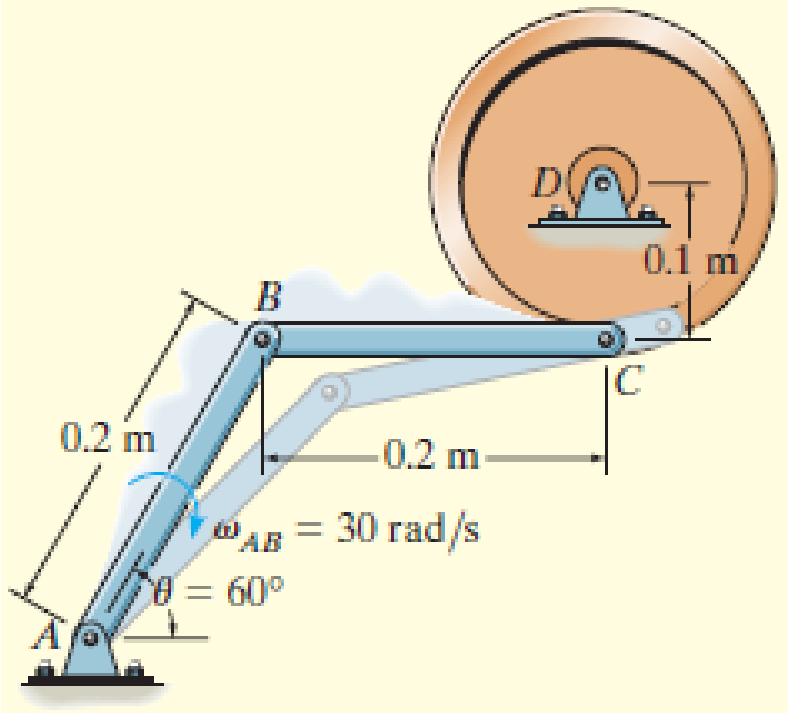
$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ \text{m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}\left(0.2\sqrt{2}\ \text{m}\right) \\ \measuredangle 45^\circ \end{bmatrix}$$



$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}\left(0.2\sqrt{2}\cos 45^\circ\right)$$

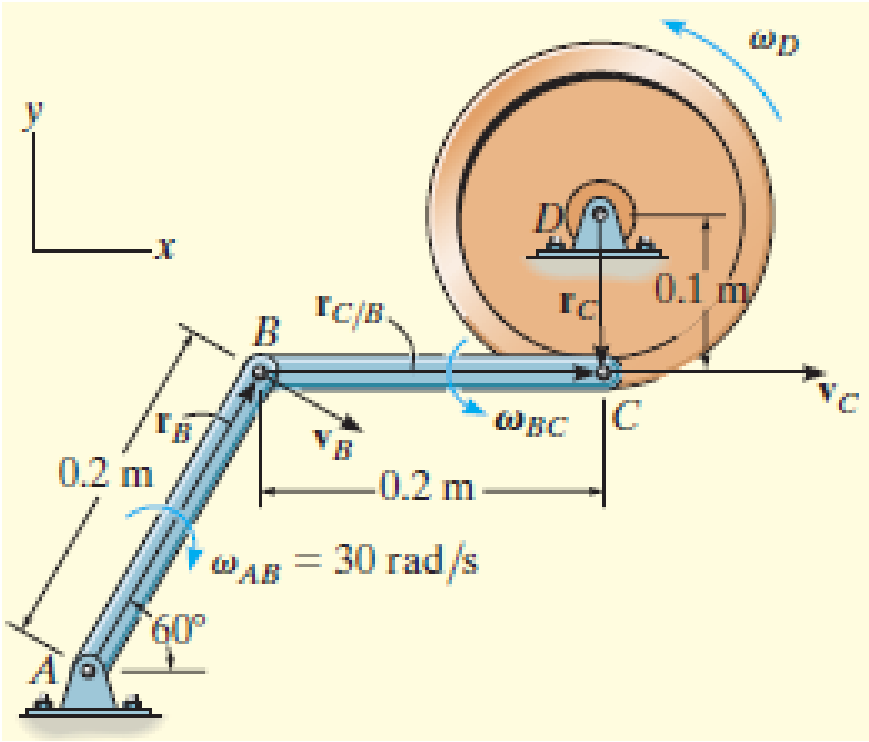
$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}\left(0.2\sqrt{2}\sin 45^\circ\right)$$

Örnek 16-9



AB çubuğu θ=60˚ olduğu anda 30 rad/s'lik açısal hıza sahiptir. *BC* kolunun ve tekerleğin bu andaki açısal hızlarını belirleyiniz.

Örnek 16-9



Çözüm (Vektörel Analiz).

AB bağlantısı için:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0.2\cos 60°\mathbf{i} + 0.2\sin 60°\mathbf{j})$$
$$= \{5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

BC bağlantısı için:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} + (0.2\omega_{BC} - 3.0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5.20\ \text{m/s}$$
$$0 = 0.2\omega_{BC} - 3.0$$
$$\omega_{BC} = 15\ \text{rad/s}\circlearrowleft$$

Tekerlek için:

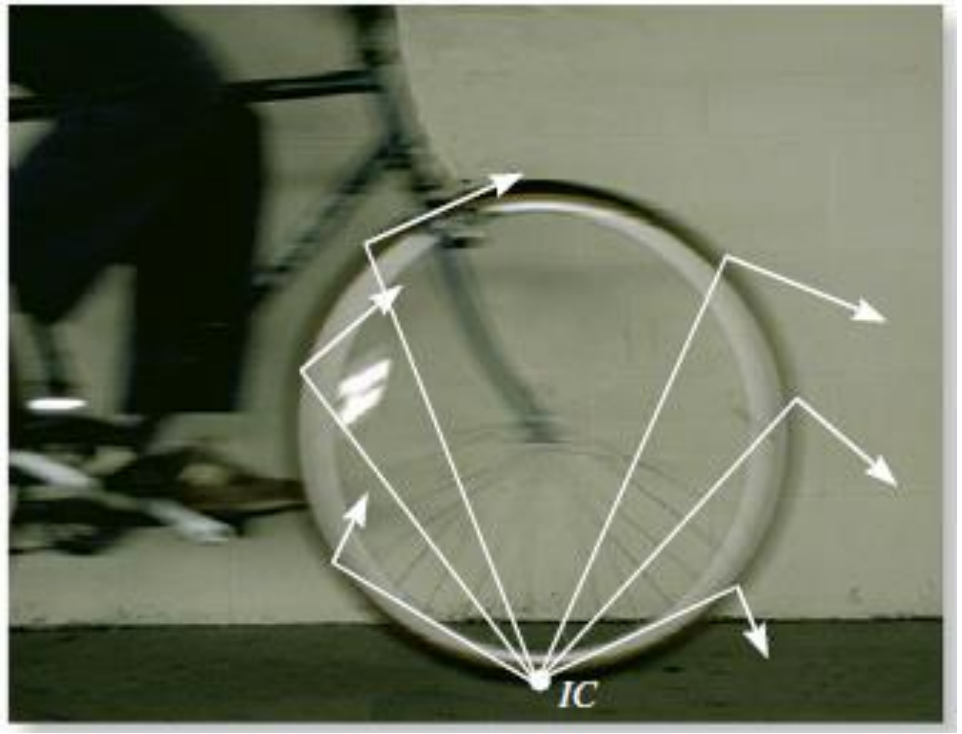
$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5.20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{j})$$
$$5.20 = 0.1\omega_D$$
$$\omega_D = 52.0\ \text{rad/s}\circlearrowleft$$

16.6 Sıfır Hızlı Anlık Merkez

Rijit cisim üzerindeki bir *B* noktasının hızı, *A* taban noktası verilen anda sıfır hıza sahip olan bir nokta olarak seçilirse, basit şekilde elde edilebilir.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Genel düzlemsel hareket yapan bir cisimde bu *A* noktasına *anlık dönme merkezi* (DM) denir. Bu nokta, *sıfır hızlı anlık eksen* üzerinde yer alır.



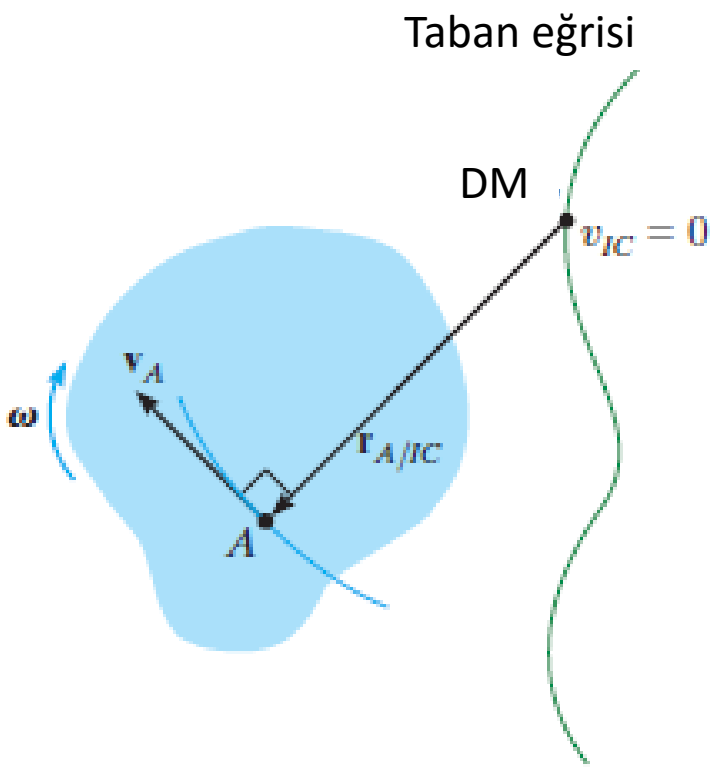
16.6 Sıfır Hızlı Anlık Merkez

DM'nin Konumu.

Konumu, DM'den herhangi bir noktaya giden bağıl konum vektörünün daima bu noktanın hızına dik olduğu gerçeği kullanılarak belirlenebilir. Değişik olasılıklar vardır:

1. *Cisim üzerindeki bir noktanın hızının ve cismin açısal hızının verilmesi durumu*.

$$r_{A/IC} = v_A/\omega.$$

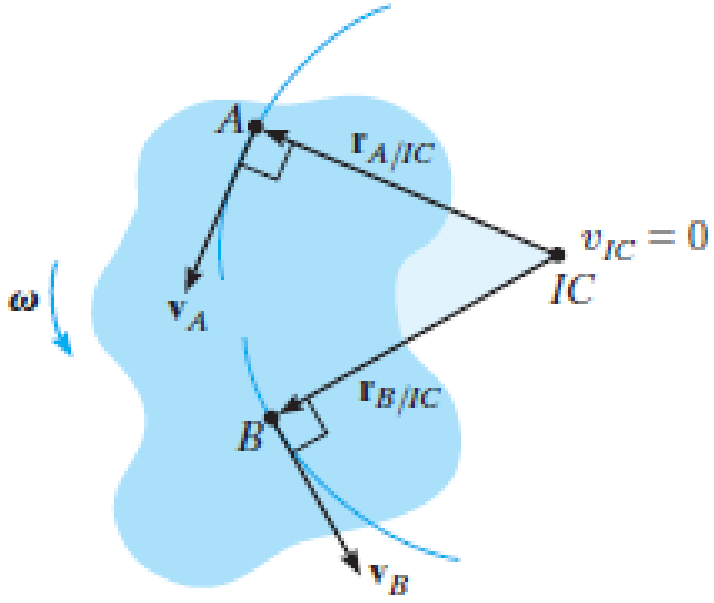


16.6 Sıfır Hızlı Anlık Merkez

DM'nin Konumu.

2. *Paralel olmayan iki hızın etki çizgilerinin verilmesi durumu*.

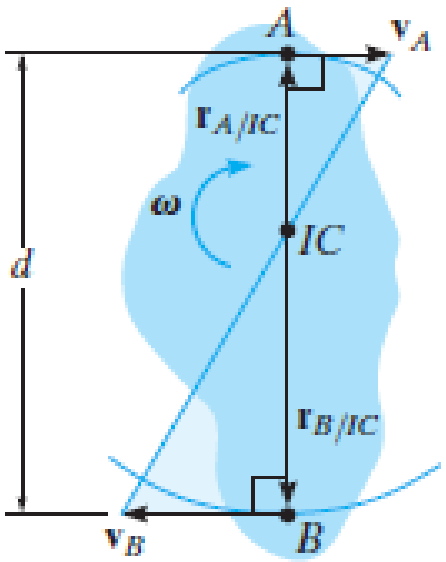
Hızların etki çizgilerinden v_A ve v_B'ye dik doğru parçalarının kesişme noktası DM'yi verir.



16.6 Sıfır Hızlı Anlık Merkez

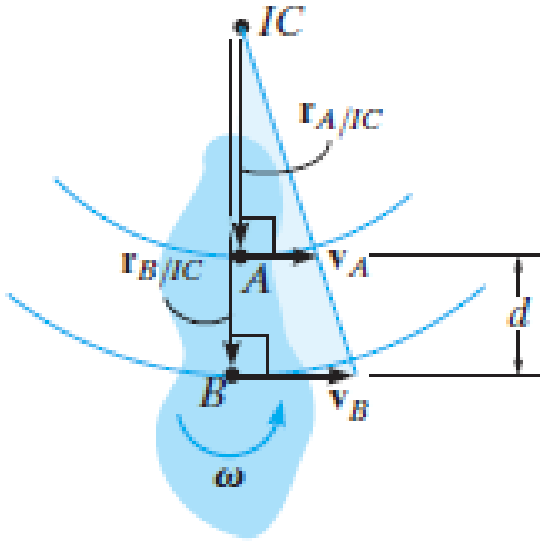
DM'nin Konumu.

3. *İki paralel hızın büyüklük ve doğrultusunun verilmesi durumu.*



$$r_{A/IC} + r_{B/IC} = d$$

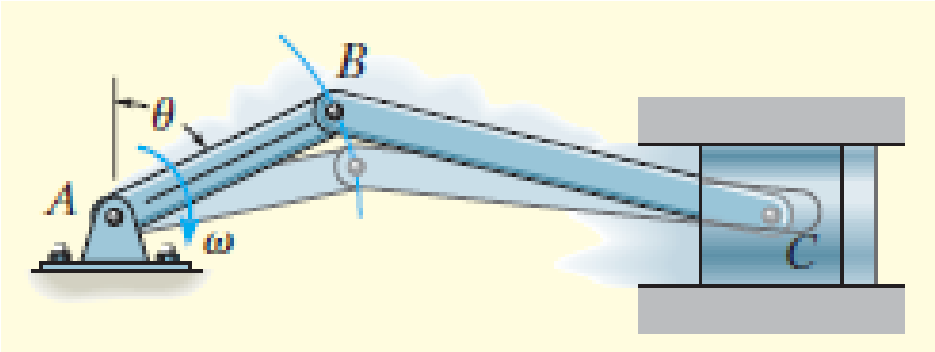
v_A ve v_B'nin hızlarının bilinmesi durumunda, DM'nin konumu, benzer üçgenlerden belirlenebilir.

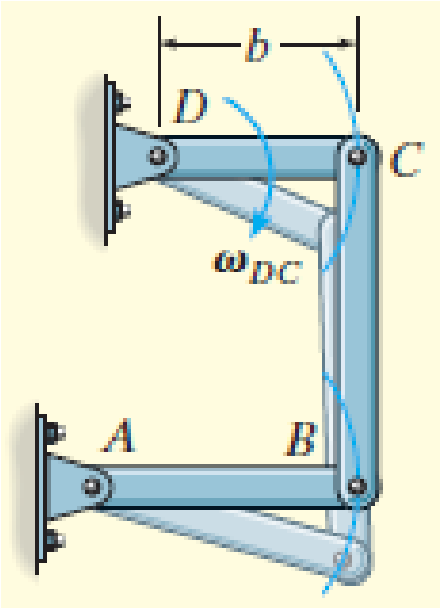


$$r_{A/IC} = v_A/\omega \text{ and } r_{B/IC} = v_B/\omega.$$

$$r_{B/IC} - r_{A/IC} = d$$

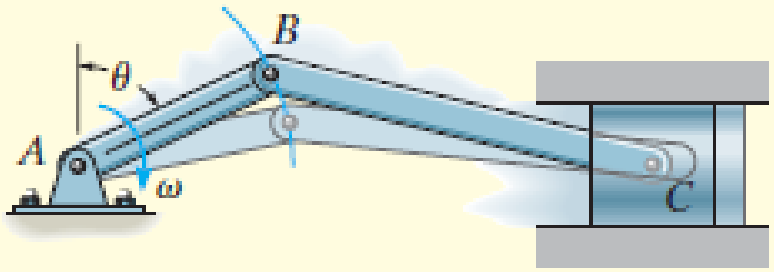
Örnek 16-10



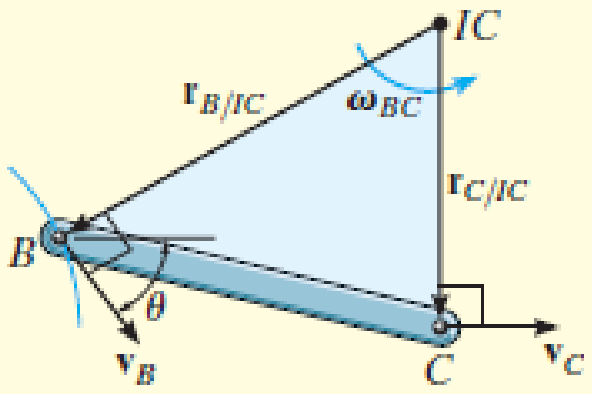


Üst şekildeki *BC* krank mili ve alt şekildeki *CB* bağlantısı için, sıfır hızlı anlık dönme merkezinin nasıl belirleneceğini gösteriniz.

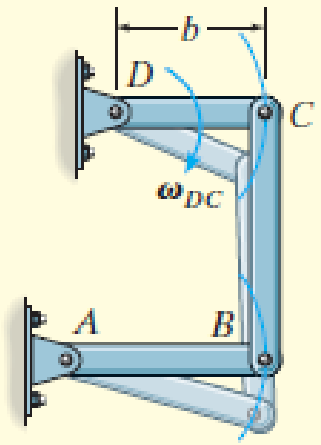
Örnek 16-10



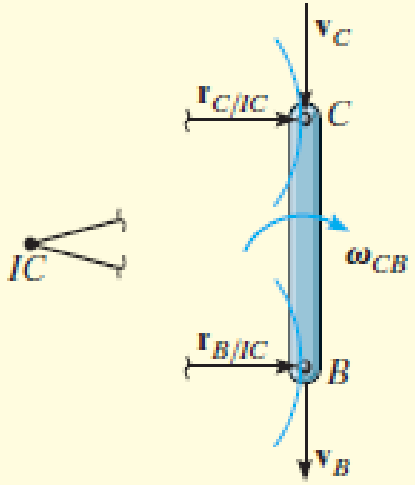
(a)



(b)



(c)



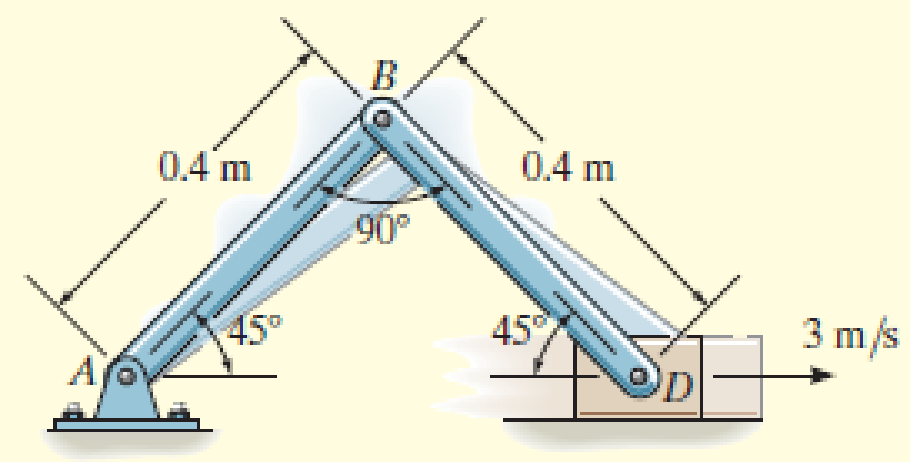
(d)

$$r_{C/IC} \rightarrow \infty$$

$$r_{B/IC} \rightarrow \infty$$

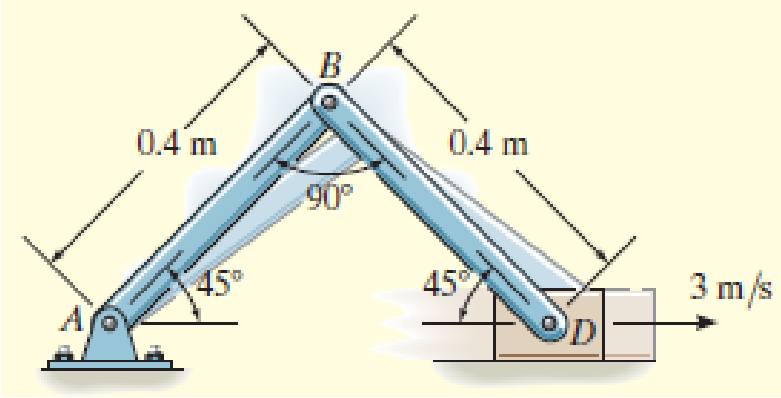
$$\omega_{CB} = (v_C / r_{C/IC}) \rightarrow 0$$

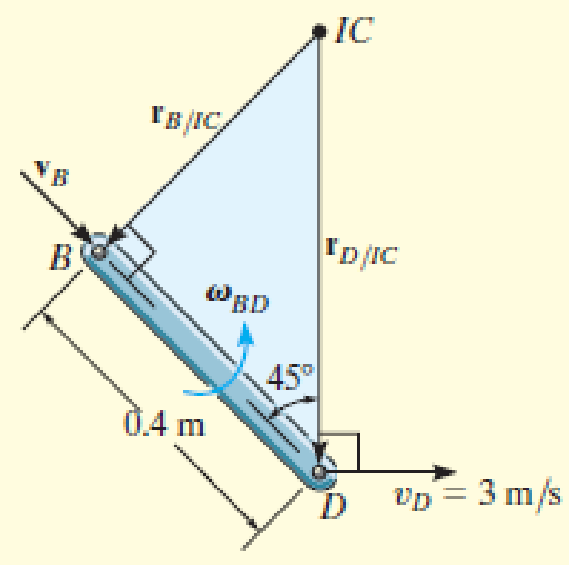
Örnek 16-11



Şekildeki *D* bloğu 3 m/s hızla hareket etmektedir. Gösterilen anda *BD* ve *AB* bağlantılarının açısal hızlarını ve *B* noktasının hızını belirleyiniz.

Örnek 16-11



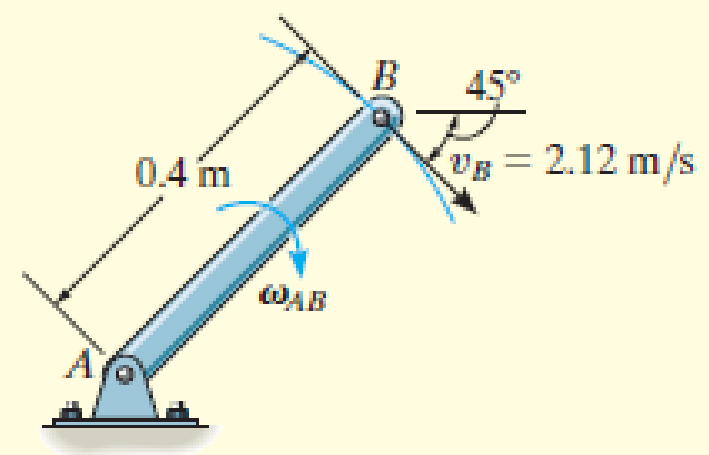


$$r_{B/IC} = 0.4 \tan 45° \text{ m} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{D/IC} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45°} = 0.5657 \text{ m}$$

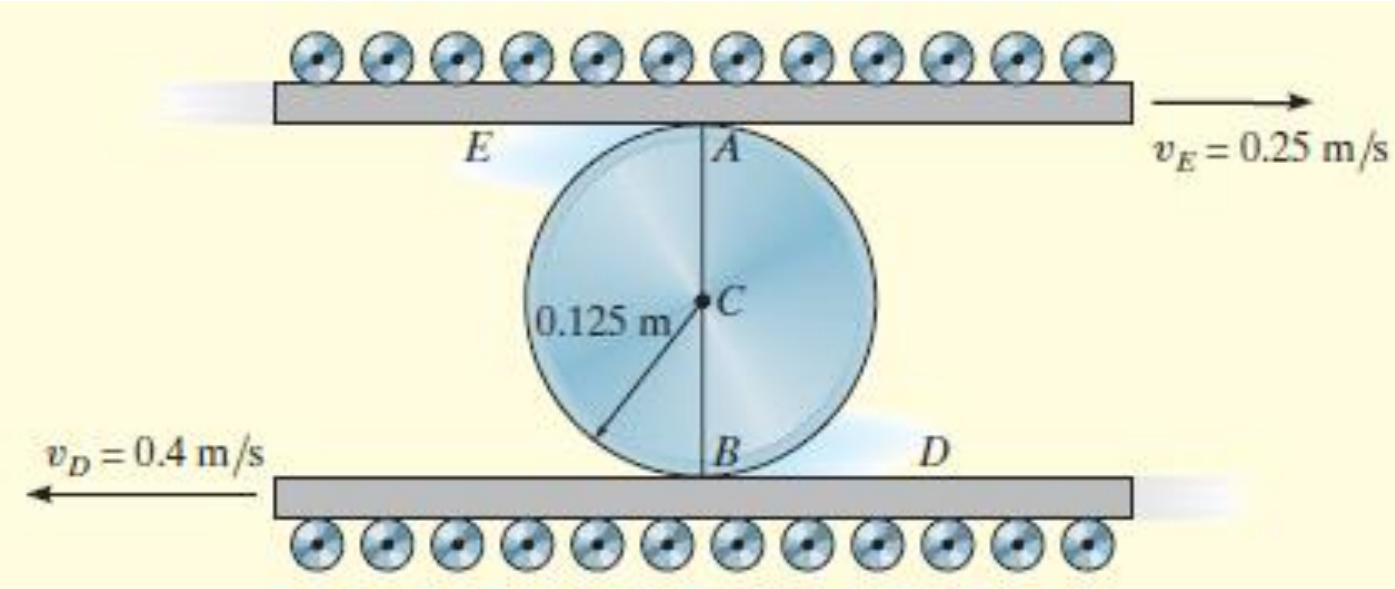
$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/IC}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0.5657 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/IC}) = 5.30 \text{ rad/s } (0.4 \text{ m}) = 2.12 \text{ m/s} \quad \measuredangle 45°$$



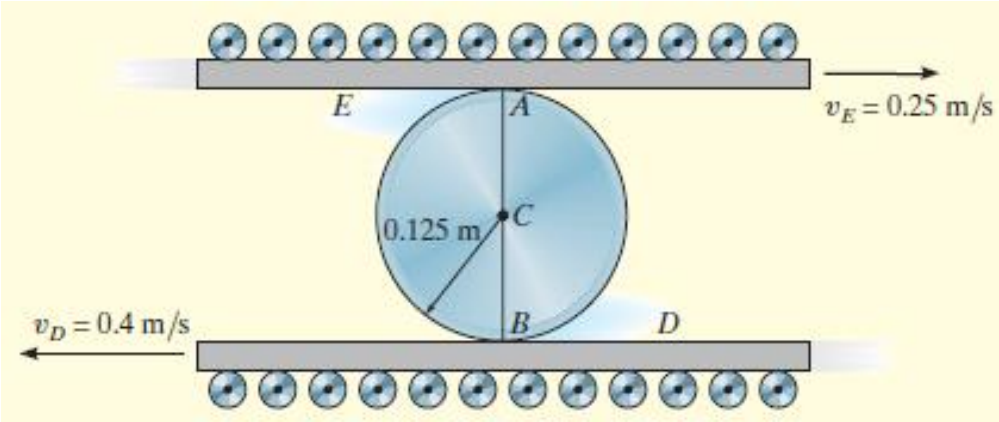
$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowright$$

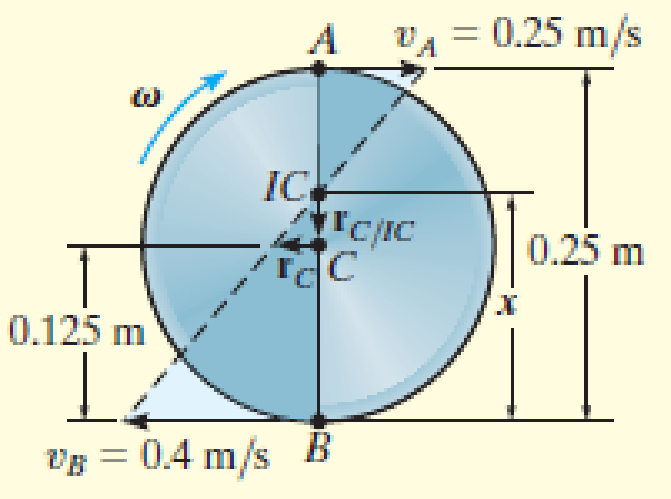
Örnek 16-12



Şekildeki silindir, *E* ve *D* hareketli plakaları arasında kaymadan yuvarlanmaktadır. Gösterilen anda silindirin açısal hızını ve merkezinin hızını belirleyiniz.

Örnek 16-12





$$v_B = \omega x; \qquad 0.4 \text{ m/s} = \omega x$$

$$v_A = \omega(0.25 \text{ m} - x); \qquad 0.25 \text{ m/s} = \omega(0.25 \text{ m} - x)$$

$$0.4(0.25 - x) = 0.25x$$

$$x = \frac{0.1}{0.65} = 0.1538 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.1538 \text{ m}} = 2.60 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_C = \omega r_{C/IC} = 2.60 \text{ rad/s } (0.1538 \text{ m} - 0.125 \text{ m})$$

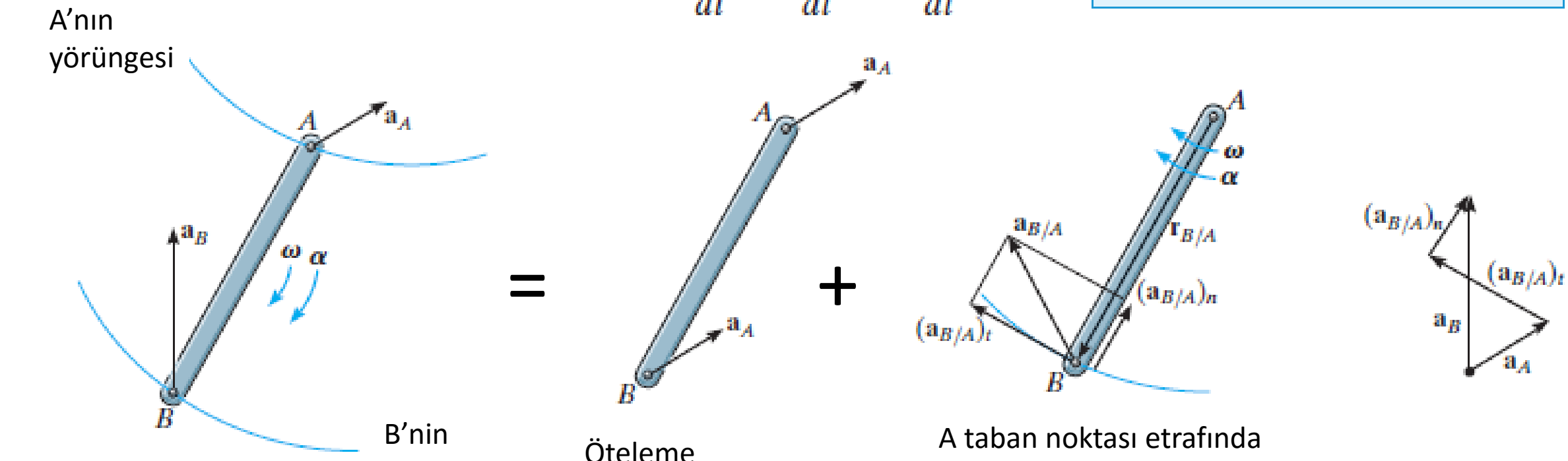
$$= 0.0750 \text{ m/s} \leftarrow$$

16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme

Genel düzlemsel hareket yapan bir rijit cisim üzerindeki iki noktanın ivmeleri, hız denkleminin zamana göre türevi alınarak belirlenebilir.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n}$$



16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n, \qquad (a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A} \qquad (a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n}$$

$\mathbf{a}_B$ = B noktasının ivmesi,

$\mathbf{a}_A$ = A noktasının ivmesi,

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = "B'nin A'ya göre" bağıl teğetsel ivme bileşenidir. Bağıl hareket dairesel olduğundan, $(\mathbf{a}_{B/A})_t$'nin *büyüklüğü* $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$'dir ve *doğrultusu* $\mathbf{r}_{B/A}$'ya diktir.

$(\mathbf{a}_{B/A})_n$ = "B'nin A'ya göre" bağıl normal ivme bileşenidir. Bağıl hareket dairesel olduğundan, $(\mathbf{a}_{B/A})_n$'nin *büyüklüğü* $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$'dir ve *doğrultusu* daima B'den A'ya doğrudur.

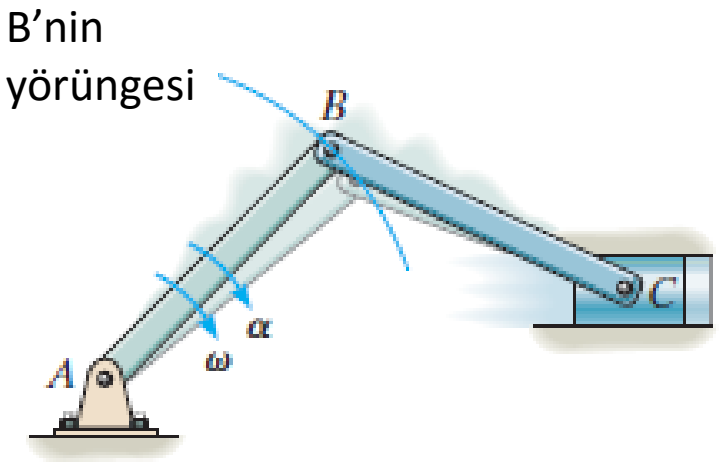
16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme

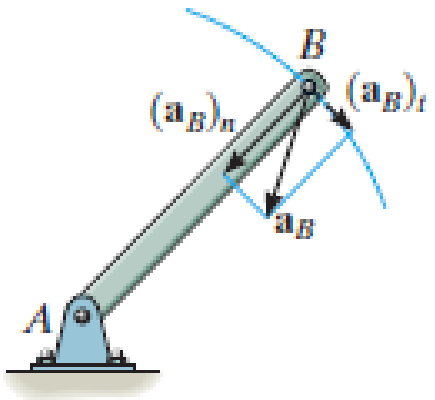
$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

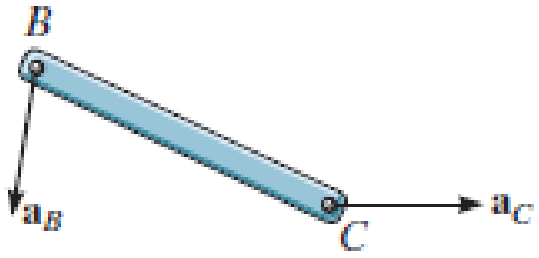
$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}}$$

$\mathbf{a}_B$ = B noktasının ivmesi,
$\mathbf{a}_A$ = A noktasının ivmesi,
$\boldsymbol{\alpha}$ = cismin açısal ivmesi,
$\boldsymbol{\omega}$ = cismin açısal hızı,
$\mathbf{r}_{B/A}$ = A'dan B'ye çizilen konum vektörüdür.

16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme



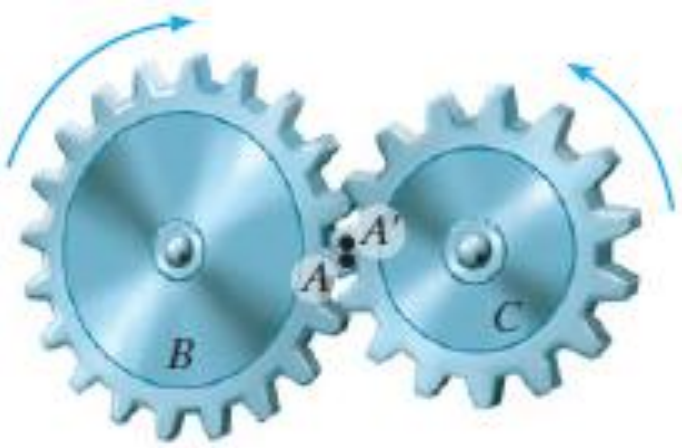


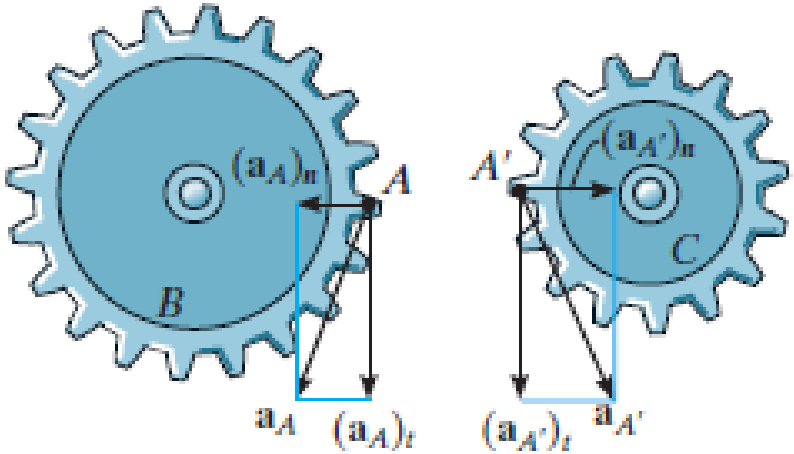


$$(a_B)_t = \alpha r_{B/A} \qquad (a_B)_n = \omega^2 r_{B/A}$$

B'nin izlediği yol hareket yörüngesi ile aynı olduğundan, mafsalla çakışan noktalar aynı ivmeye sahiptir.

16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme



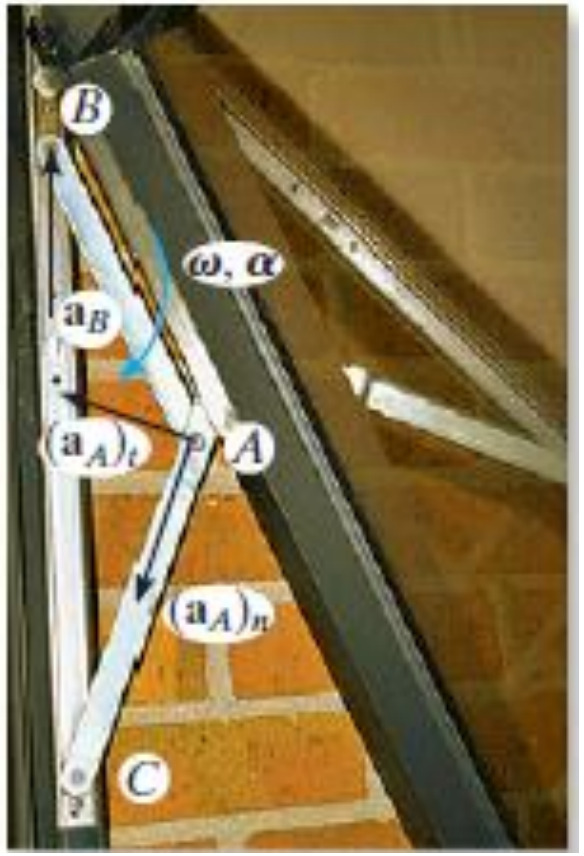


$$(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$$

$$(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n \qquad \mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$$

Temas noktalarının ivmelerinin teğetsel bileşenleri aynı olup normal bileşenleri birbirinden farklıdır.

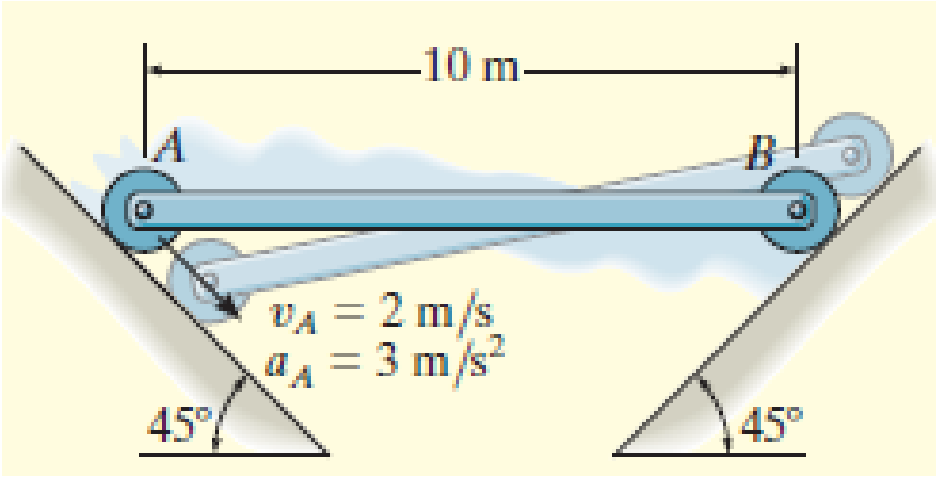
16.7 Bağıl Hareket Analizi: İvme



Şekilde bir pencere mekanizması görülmektedir. *CA* parçası *C* noktasından geçen bir eksen etrafında dönmektedir. *AB* ise genel düzlemsel hareket yapmaktadır.

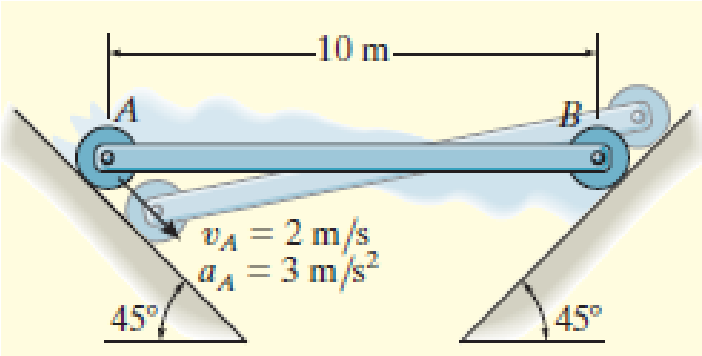
A noktası eğrisel bir yörünge izlediğinden ivmesinin iki bileşeni vardır. *B* noktası ise düz bir rayda hareket etmektedir ve ivmesinin doğrultusu belirlenmiştir.

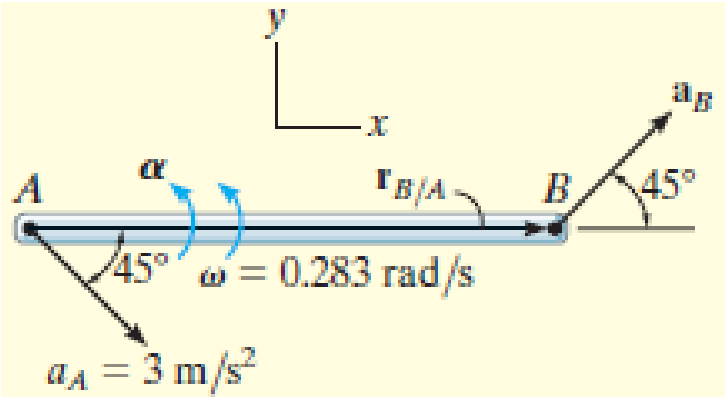
Örnek 16-13



AB çubuğu, *A* ve *B*'deki eğik düzlemler boyunca hareket edebilmektedir. *A* noktası, çubuk yatay konumda bulunduğu anda her ikisi de aşağı doğru yönlenmiş 3 m/s^2'lik bir ivmeye ve 2 m/s'lik bir hıza sahip olduğuna göre, çubuğun bu andaki açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-13





Çözüm (Vektörel Analiz).

$$\omega = 0.283 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \sin 45°\mathbf{j} = 3 \cos 45°\mathbf{i} - 3 \sin 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0.283)^2(10\mathbf{i})$$

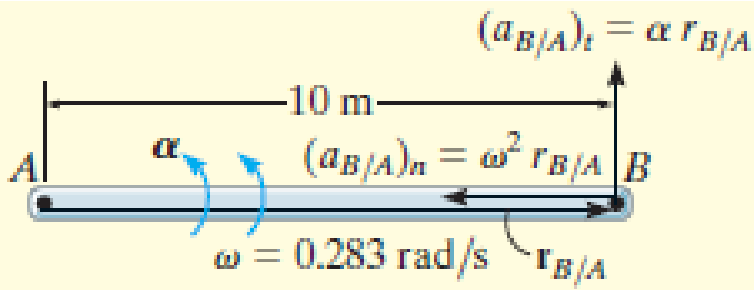
$$a_B \cos 45° = 3 \cos 45° - (0.283)^2(10)$$

$$a_B \sin 45° = -3 \sin 45° + \alpha(10)$$

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \measuredangle 45°$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

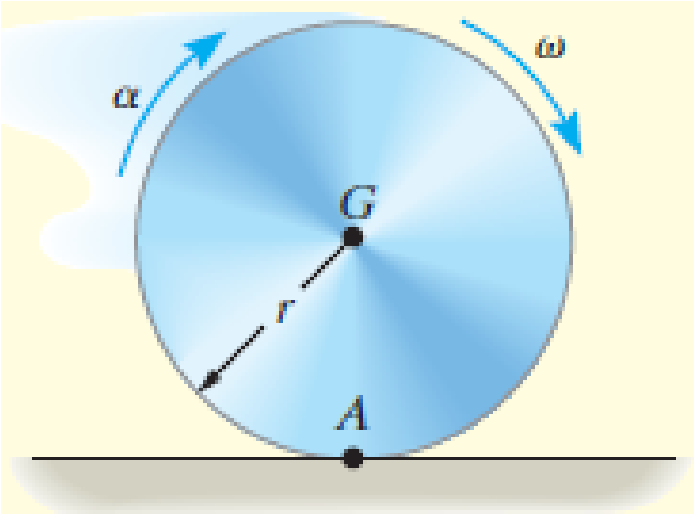
Çözüm (Skaler Bileşenler).



$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

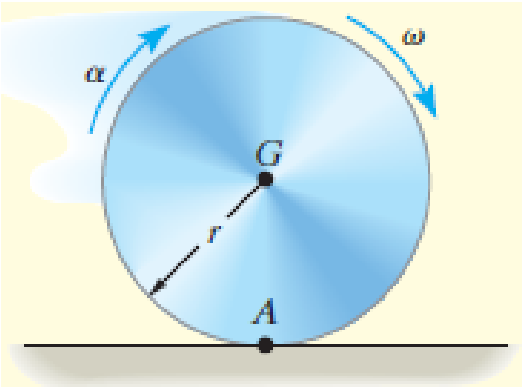
$$\begin{bmatrix} a_B \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Örnek 16-14



r yarıçaplı silindir, verilen bir anda $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızı ve $\boldsymbol{\alpha}$ açısal ivmesine sahiptir. Silindir kaymadan yuvarlandığına göre, *G* merkezinin hız ve ivmesi ile *A* temas noktasının ivmesini belirleyiniz.

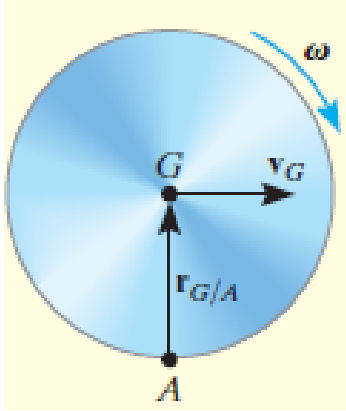
Örnek 16-14



$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$$

$$v_G\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$

$$v_G = \omega r$$

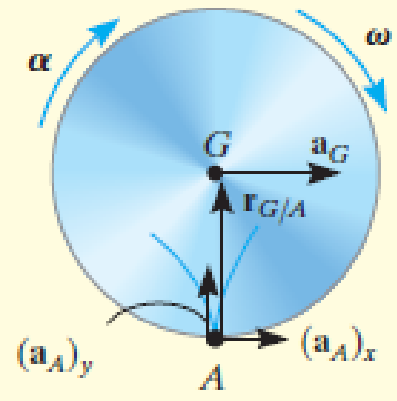


$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

$$a_G = \alpha r$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{G/A}$$

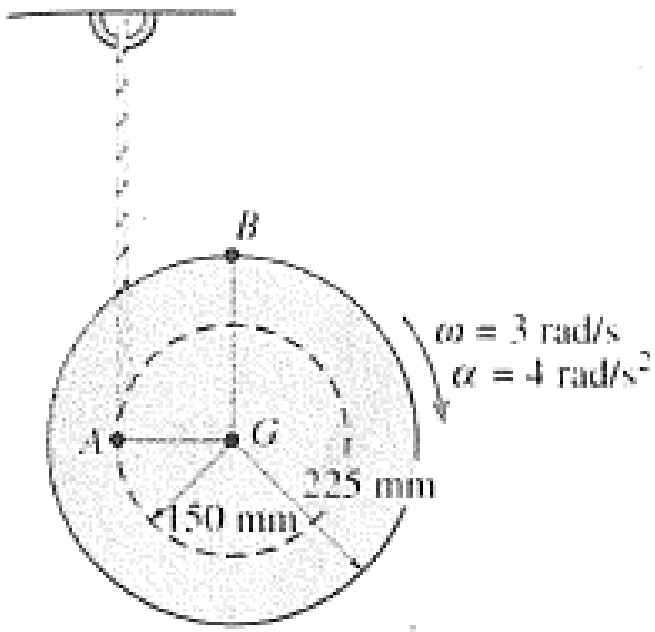
$$\alpha r\,\mathbf{i} = (a_A)_x\mathbf{i} + (a_A)_y\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j}) - \omega^2(r\mathbf{j})$$



$$(a_A)_x = 0$$

$$(a_A)_y = \omega^2 r$$

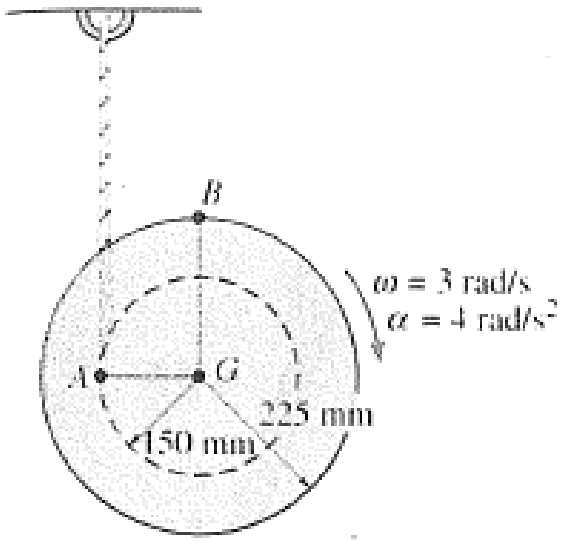
Örnek 16-15



Makara gösterilen anda 3 rad/s'lik bir açısal hıza ve 4 rad/s^2'lik bir açısal ivmeye sahip olacak şekilde ipten çözülmektedir. B noktasının ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-15

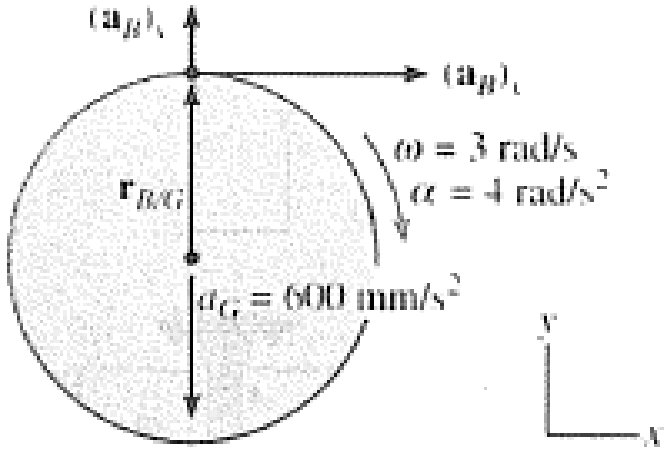
Çözüm (Vektörel Analiz).



$$a_G = \alpha r = 4(150) = 600 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -600\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (225\mathbf{j}) - (3)^2(225\mathbf{j})$$



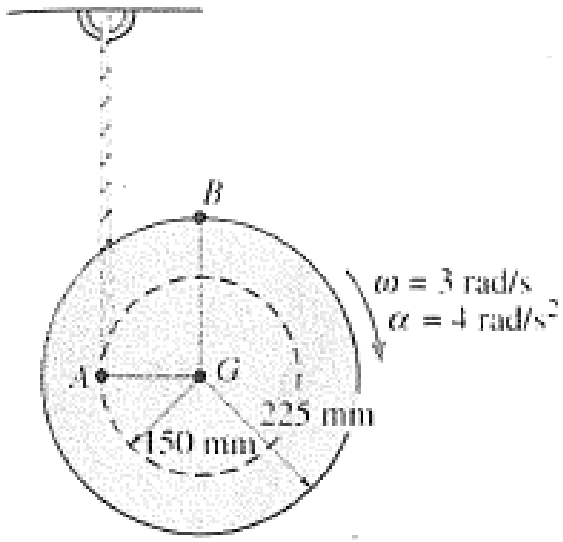
$$(a_B)_x = 4(225) = 900 \text{ mm/s}^2 = 0.9 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

$$(a_B)_x = -600 - 2025 = -2625 \text{ mm/s}^2 = 2.775 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

$$a_B = \sqrt{(0.9)^2 + (2.625)^2} = 2.775 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2.625}{0.9} = 71.1^\circ$$

Örnek 16-15

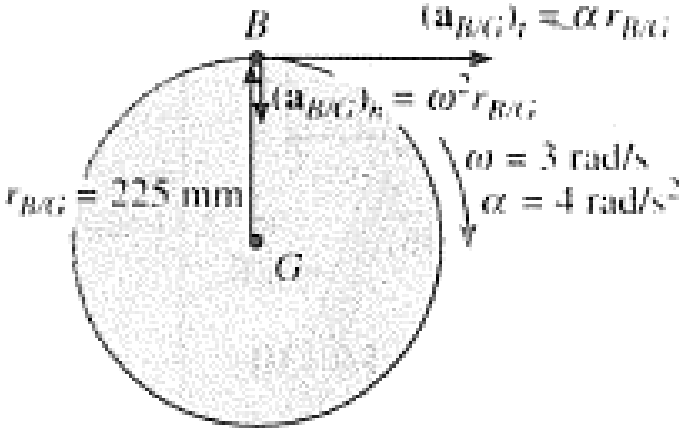


Çözüm (Skaler Bileşenler).

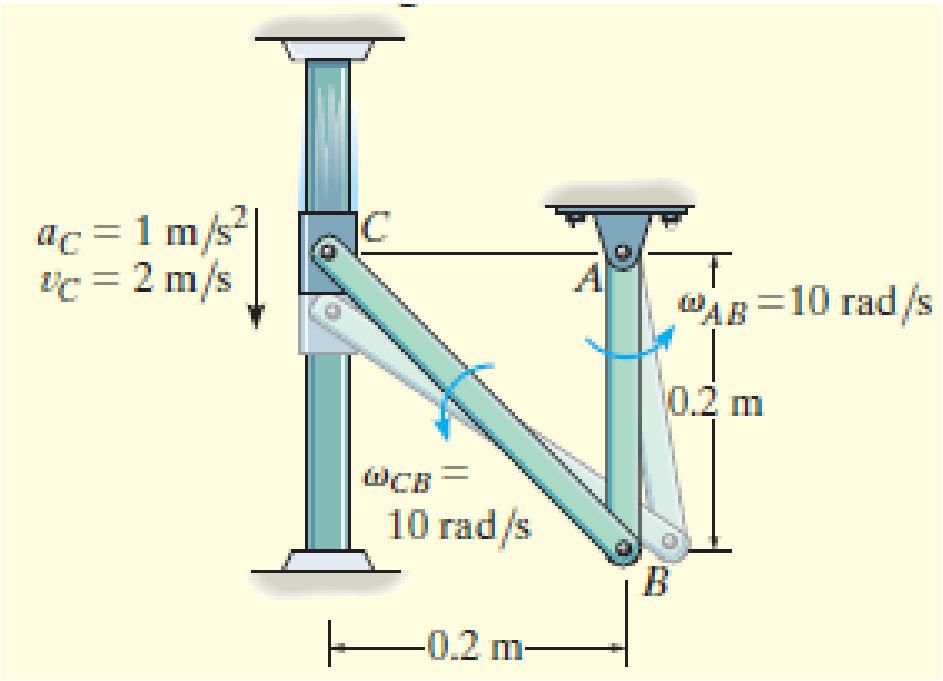
$$\begin{bmatrix} (a_B)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_B)_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6\ \text{m/s}^2 \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\ \text{rad/s}^2(0.225\ \text{m}) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3\ \text{rad/s}(0.225\ \text{m}) \\ \downarrow \end{bmatrix}$$

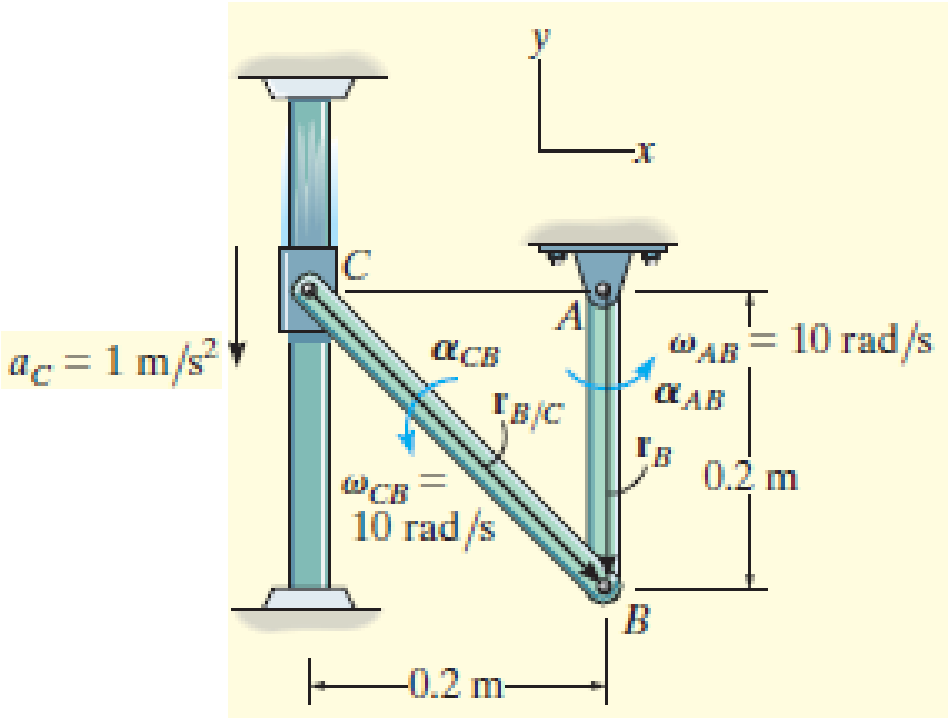


Örnek 16-17



C bileziği 1 m/s^2'lik bir ivmeyle aşağı doğru hareket etmektedir. Gösterilen anda *CB* ve *AB*'nin açısal ivmelerini belirleyiniz.

Örnek 16-17



$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

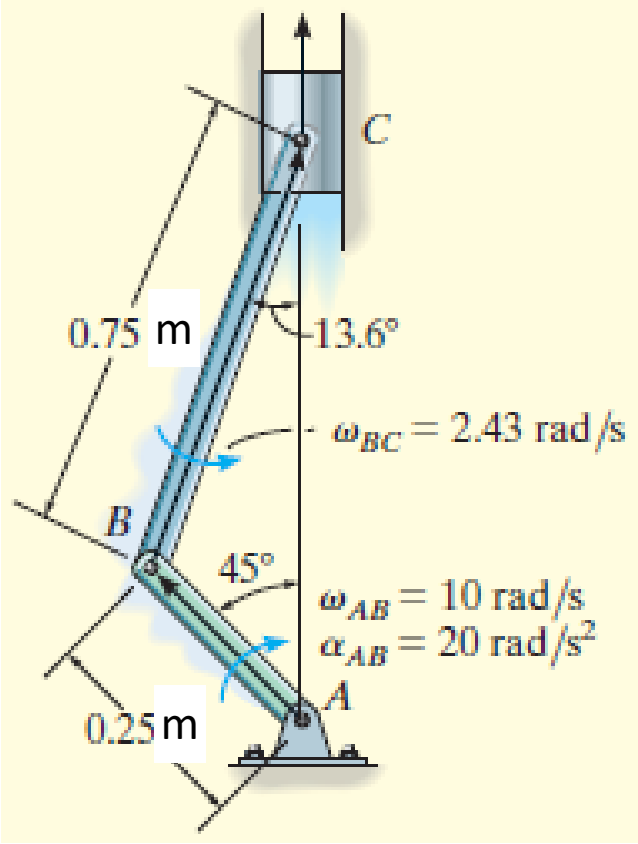
$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$

$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

$$\alpha_{CB} = 5\ \text{rad/s}^2 \circlearrowleft$$

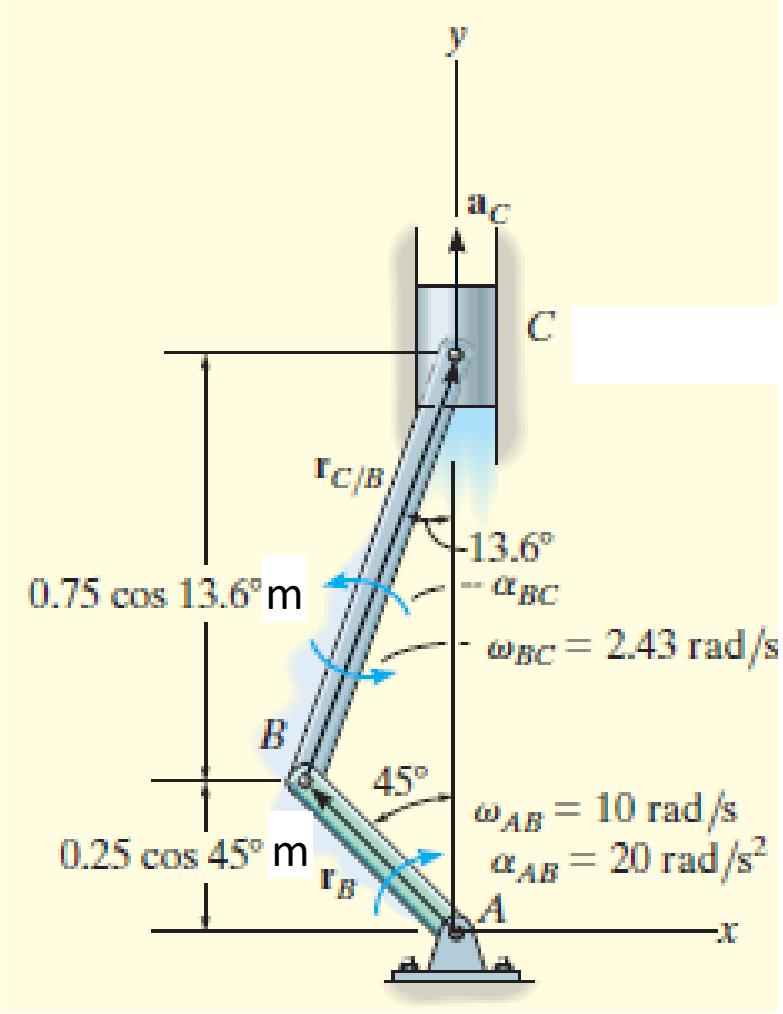
$$\alpha_{AB} = -95\ \text{rad/s}^2 = 95\ \text{rad/s}^2 \circlearrowright$$

Örnek 16-17



AB krank mili 20 rad/s^2'lik bir açısal ivmeyle saat yönünde dönmektedir. Gösterilen konumda pistonun ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-17



$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \sin 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\}\text{ m} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\}\text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \sin 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\}\text{ m} = \{0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\}\text{ m}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B \\ &= (-20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) \\ &= \{21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j}\}\text{ m/s}^2\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2\mathbf{r}_{C/B}$$

$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) - (2.43)^2(0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$

$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + 0.177\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j}$$

$$0 = 20.17 - 0.729\alpha_{BC}$$

$$a_C = 0.177\alpha_{BC} - 18.45$$

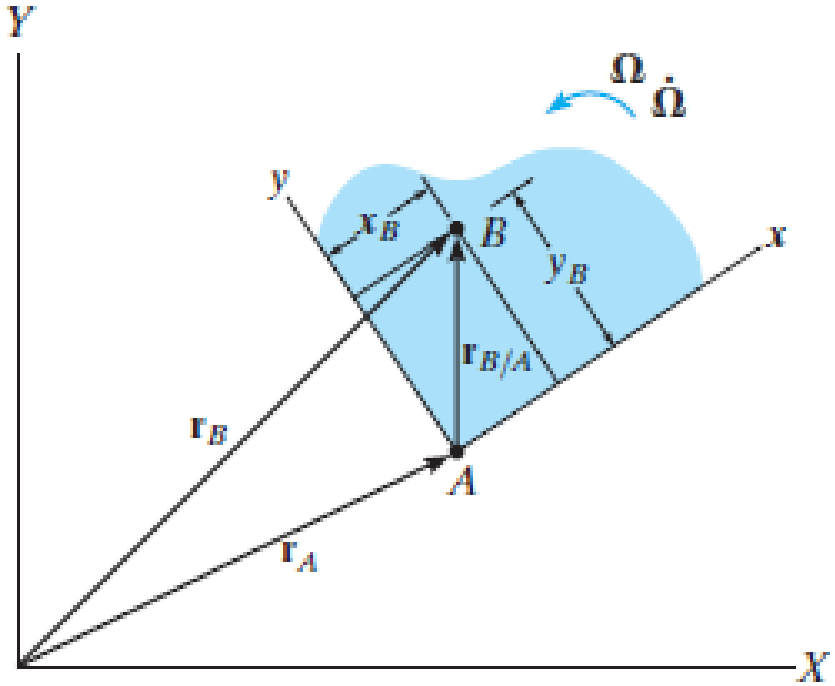
$$\alpha_{BC} = 27.7\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

$$a_C = -13.5\text{ m/s}^2$$

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Bazı rijit cisimler, bağlantılarda kayma olacak şekilde bir araya getirilmişlerdir. Bu durumda en iyi kinematik analiz, hem ötelenen hem dönen bir koordinat sistemi kullanılmasını gerektirir.

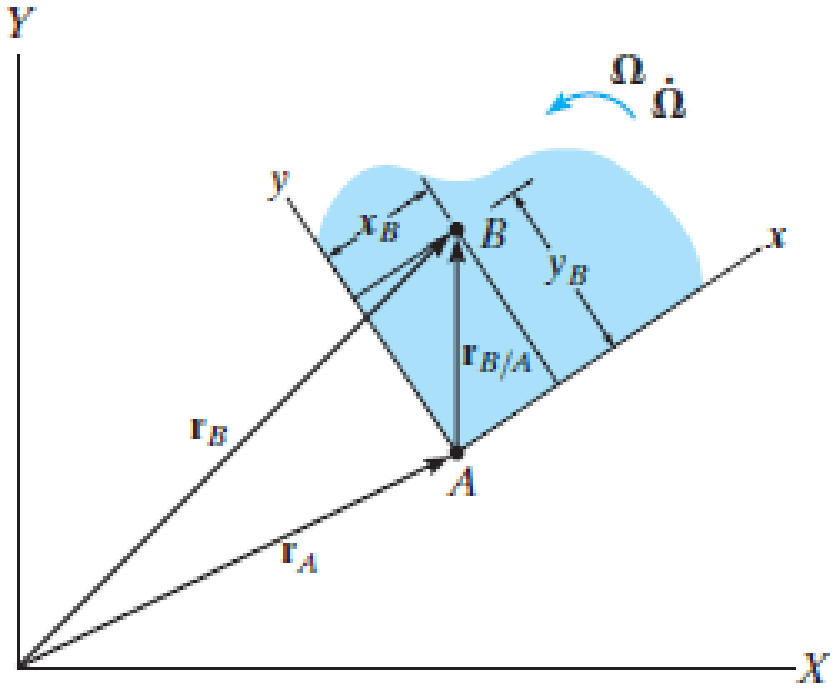
Bu referans sistemi ayrıca, bir düzenekte aynı rijit cisim üzerinde bulunmayan iki noktanın hareketinin analizinde ve parçacığın dönen bir yörünge boyunca hareket etmesi halinde kinematiğini belirlemede kullanılabilir.



16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Konum.

A taban noktası, *X*, *Y*, *Z* sabit koordinat sistemine göre hem ötelenen hem dönen *x*, *y*, *z* koordinat sisteminin orijinini gösterir. Burada, bağıl konum vektörünün hareketli referans sistemine göre ölçüldüğü kabul edilecektir.



$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}}$$

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Hız.

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}}$$

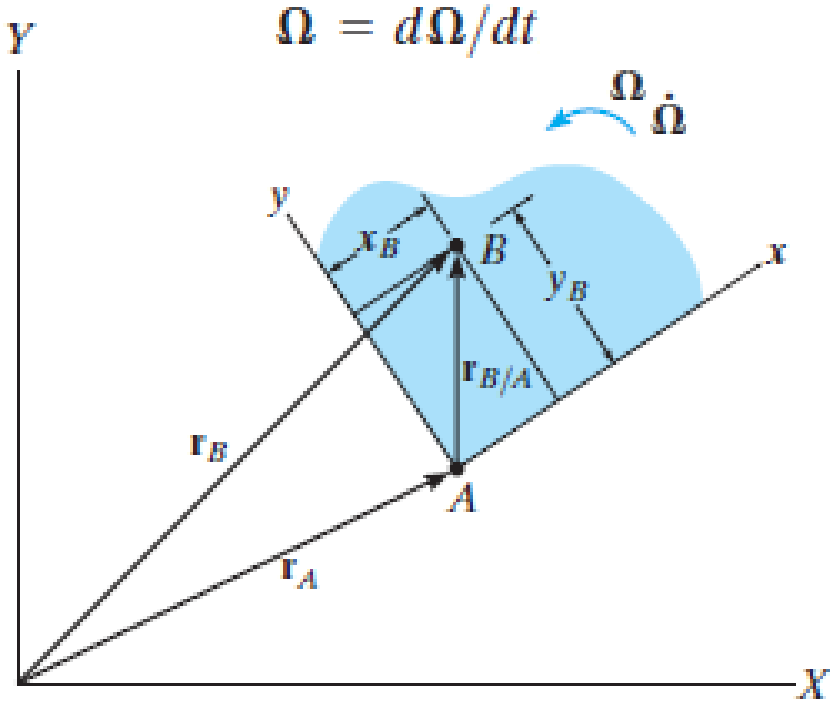
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

$$= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$$



İlk parantezdeki terimler $(v_{B/A})_{xyz}$, *B* noktasının hareketli sistemden ölçülen hız bileşenlerini verir.

İkinci parantezdeki birim vektörlerin değişim hızı sabit sistemden ölçülür.

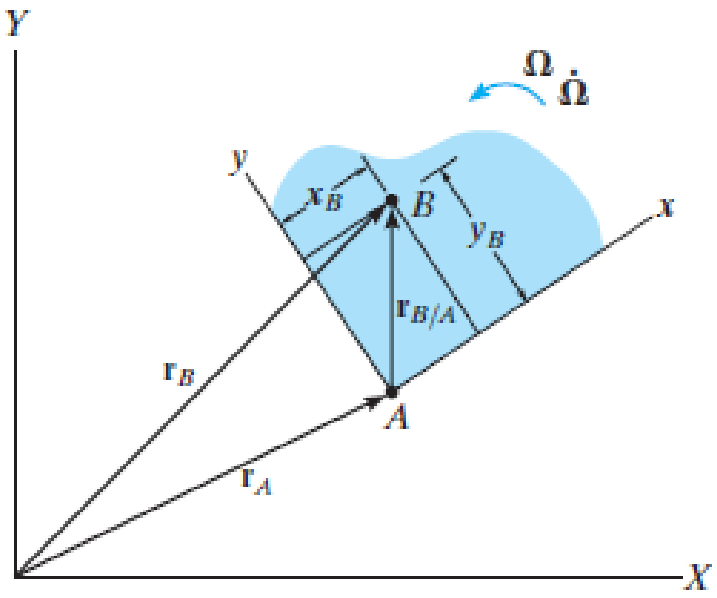
16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Hız.

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

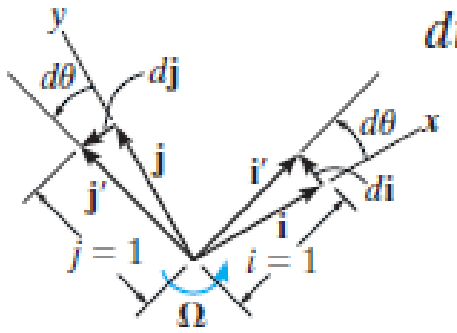
$$= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)$$

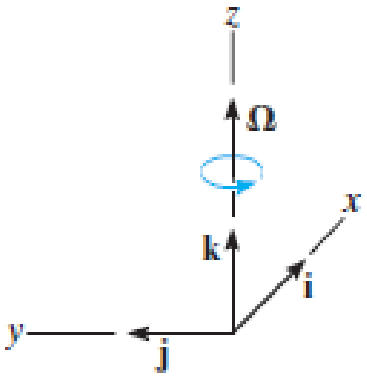


*d***i** ve *d***j**, *d*θ anlık dönmesinden ortaya çıkar.

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}$$



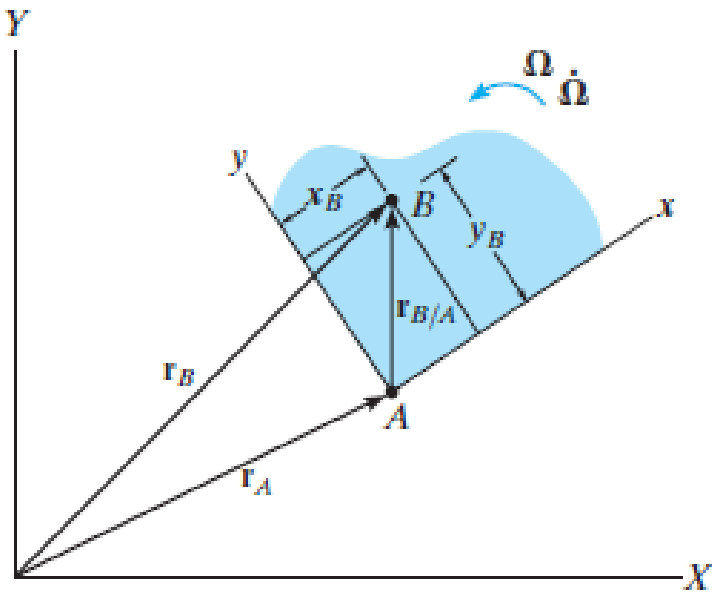
16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Hız.

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

$$= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)$$



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}$$

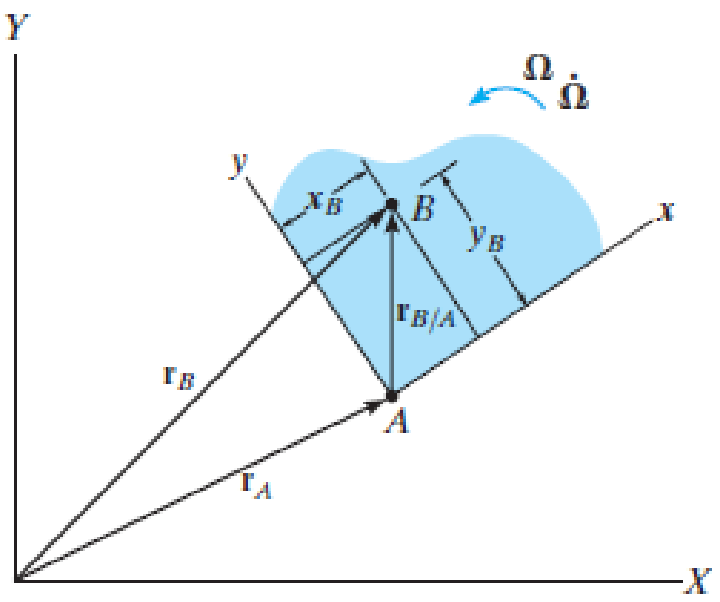
$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}$$

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Hız.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$



$\mathbf{v}_B$ = B'nin X, Y, Z referans sisteminden ölçülen hızını,

$\mathbf{v}_A$ = x, y, z referans sisteminin A orijininin, X, Y, Z referans sisteminden ölçülen hızını,

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = dönen x, y, z referans sistemine yerleştirilen bir gözlemci tarafından ölçülen "B'nin A'ya göre" bağıl hızını,

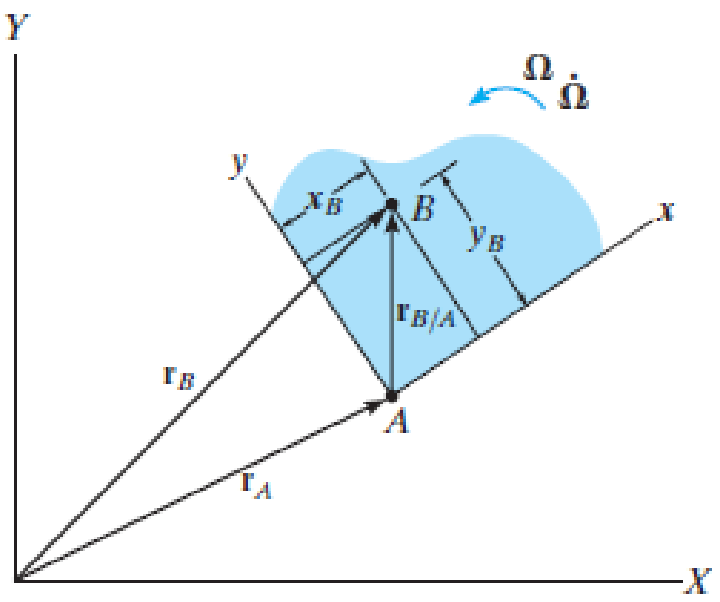
$\mathbf{\Omega}$ = x, y, z referans sisteminin X, Y, Z referans sisteminden ölçülen açısal hızını,

$(\mathbf{r}_{B/A})$ = "B'nin A'ya göre" bağıl konumunu göstermektedir.

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

Hız.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$



$\mathbf{v}_B$ {B'nin mutlak hızı (eşittir)

$\mathbf{v}_A$ { x, y, z referans sisteminin orijininin mutlak hızı (artı)

$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ { x, y, z referans sisteminin dönmesinin neden olduğu açısal hız etkisi (artı)

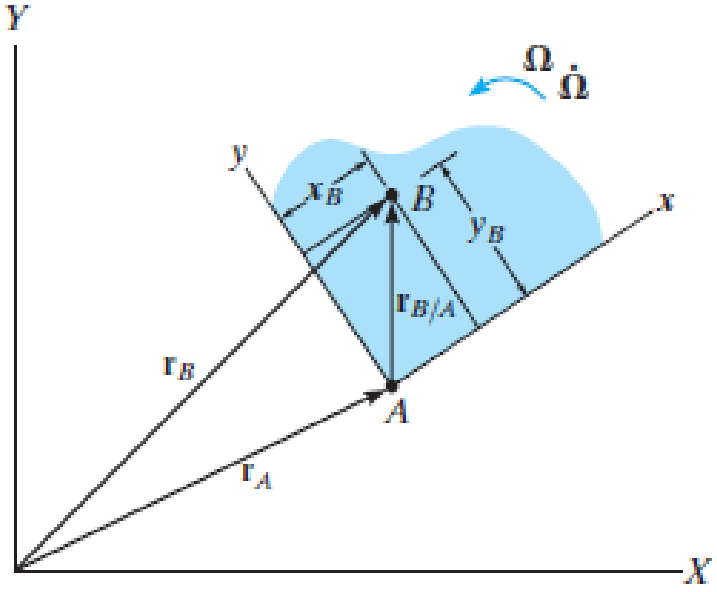
} x, y, z sisteminin X, Y, Z sisteminden gözlenen hareketi

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ { B'nin A'ya göre bağıl hızı } B'nin x, y, z sisteminden gözlenen hareketi

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

İvme.

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}$$



$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\mathbf{j},$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

İlk parantezdeki terimler *B* noktasının hareketli sisteme göre ölçülen ivmesini gösterir $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.

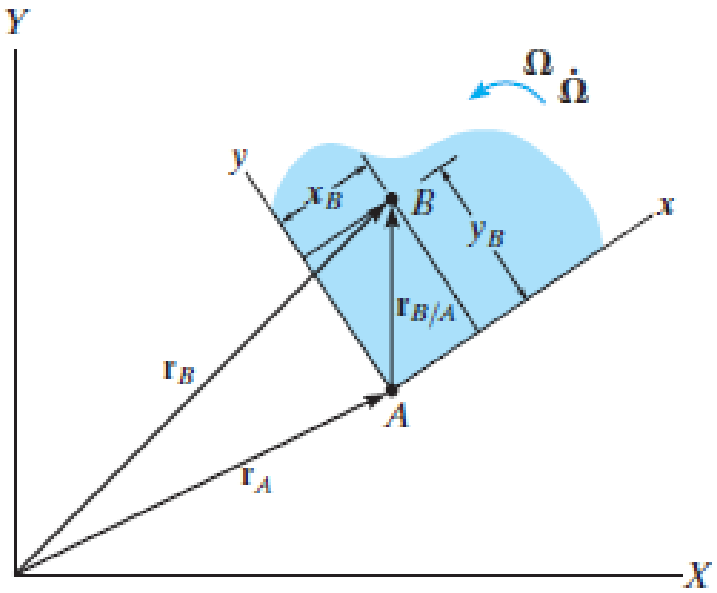
16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

İvme.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

İkinci parantezdeki terimler aşağıdaki gibi basitleştirilebilir:



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

İvme.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

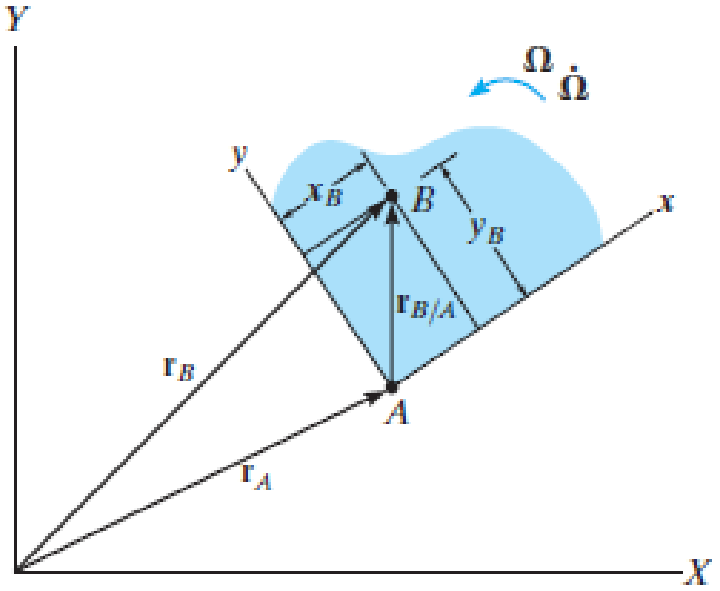
$\mathbf{a}_B$ = B'nin X, Y, Z referans sisteminden ölçülen ivmesini,

$\mathbf{a}_A$ = x, y, z referans sisteminin A orijininin, X, Y, Z referans-sisteminden ölçülen ivmesini,

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = Dönen x, y, z referans sistemine yerleştirilen bir gözlemci tarafından ölçülen "B'nin A'ya göre" bağıl ivmesi ve bağıl hızını,

$\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}$ = x, y, z referans sisteminin X, Y, Z referans sisteminden ölçülen açısal ivmesi ve açısal hızını,

$(\mathbf{r}_{B/A})$ = "B'nin A'ya göre" bağıl konumunu göstermektedir.



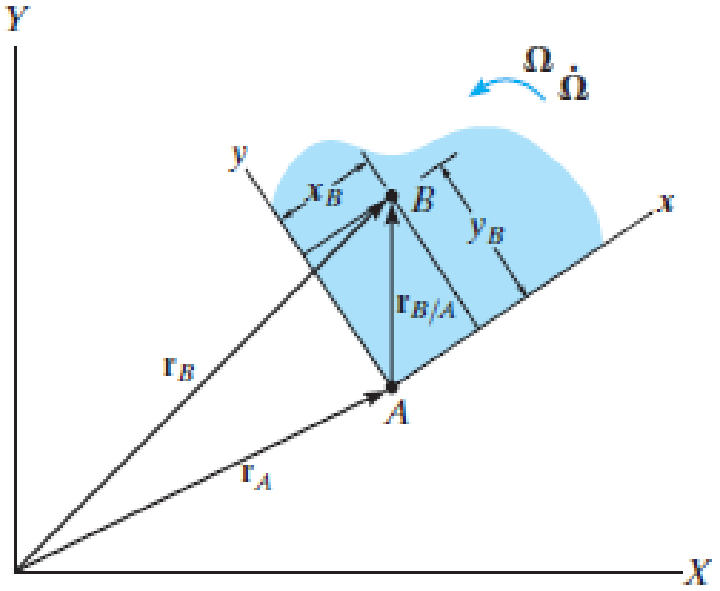
16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

İvme.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

$2\mathbf{\Omega}\mathrm{x}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ terimine Coriolis ivmesi denir. *B*'nin dönmeyen ve dönen eksenlerden ölçülen ivmeleri arasındaki farkı gösterir.

Roketler, uzun menzilli mermiler ve dünyanın dönmesinden fazla etkilenen hareketler yapan cisimler üzerine etkiyen ivme ve kuvvetler incelenirken ortaya çıkar.

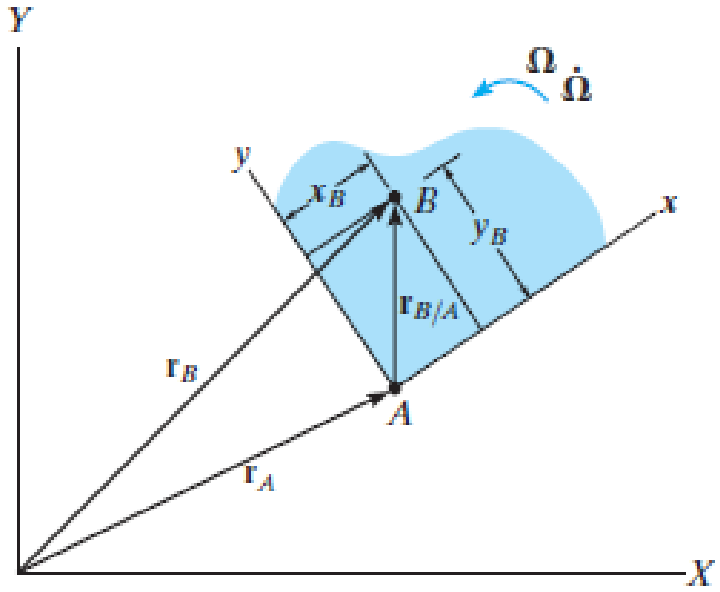


16.8 Dönen Eksenlerde Bağıl Hareket Analizi

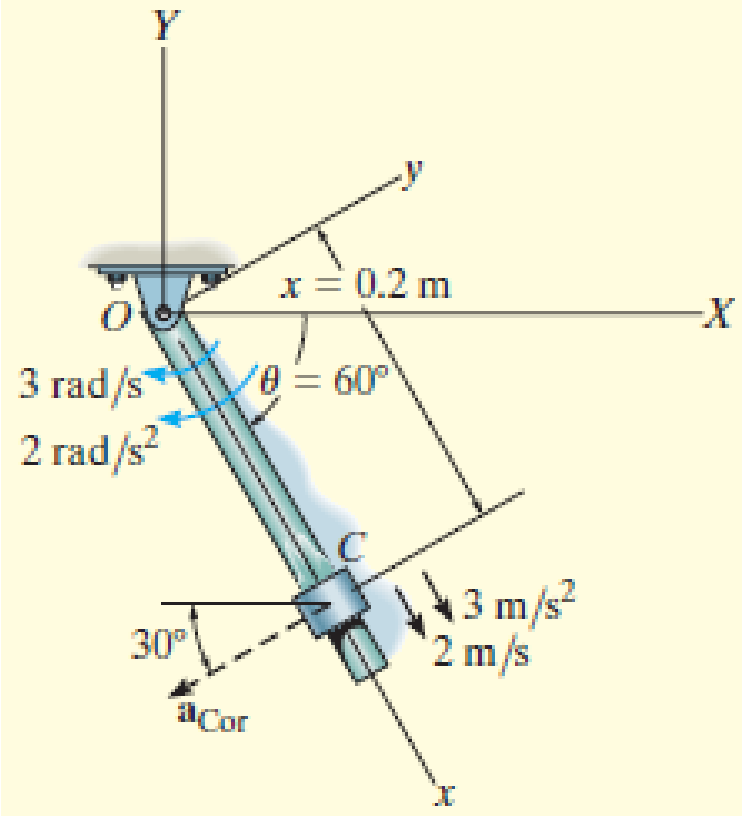
İvme.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

$\mathbf{a}_B$	{B'nin mutlak ivmesi	
	(eşittir)	
$\mathbf{a}_A$	x, y, z referans sisteminin orijininin mutlak ivmesi	x, y, z sisteminin X, Y, Z sisteminden gözlenen hareketi
	(artı)	
$\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$	x, y, z referans sisteminin dönmesinin neden olduğu açısal ivme etkisi	
	(artı)	
$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$	x, y, z referans sisteminin dönmesinin neden olduğu açısal hız etkisi	
	(artı)	
$2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	x, y, z referans sisteminin dönmesi ile B'nin x, y, z koordinatlarına göre hareketinin birlikte oluşturduğu etki	birbirini etkileyen hareket
	(artı)	
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$	B'nin A'ya göre bağıl ivmesi	B'nin x, y, z sisteminden gözlenen hareketi

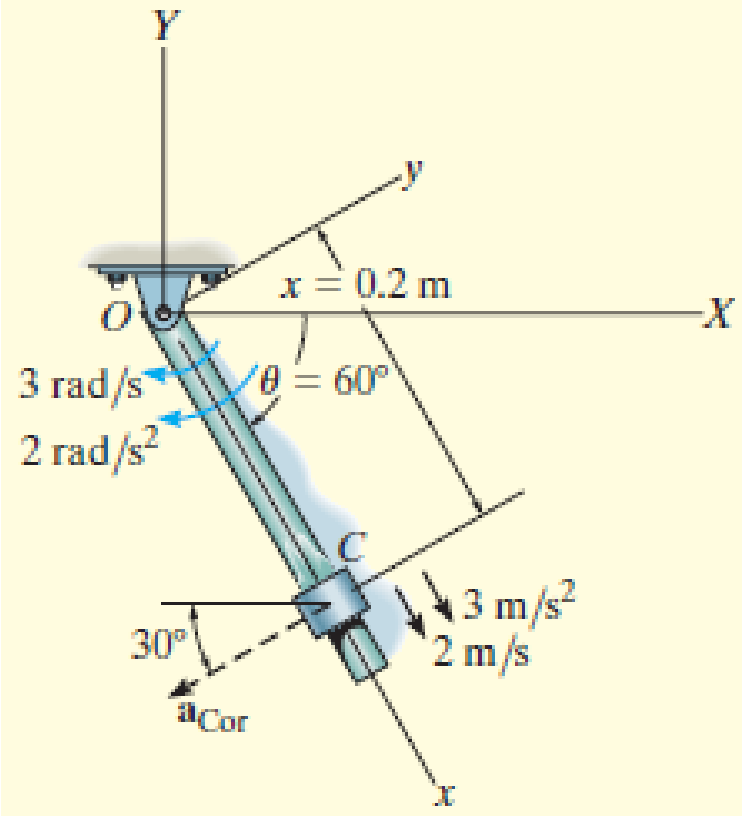


Örnek 16-18



Verilen anda Coriolis ivmesi ile bileziğin hız ve ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-18



$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz}$$

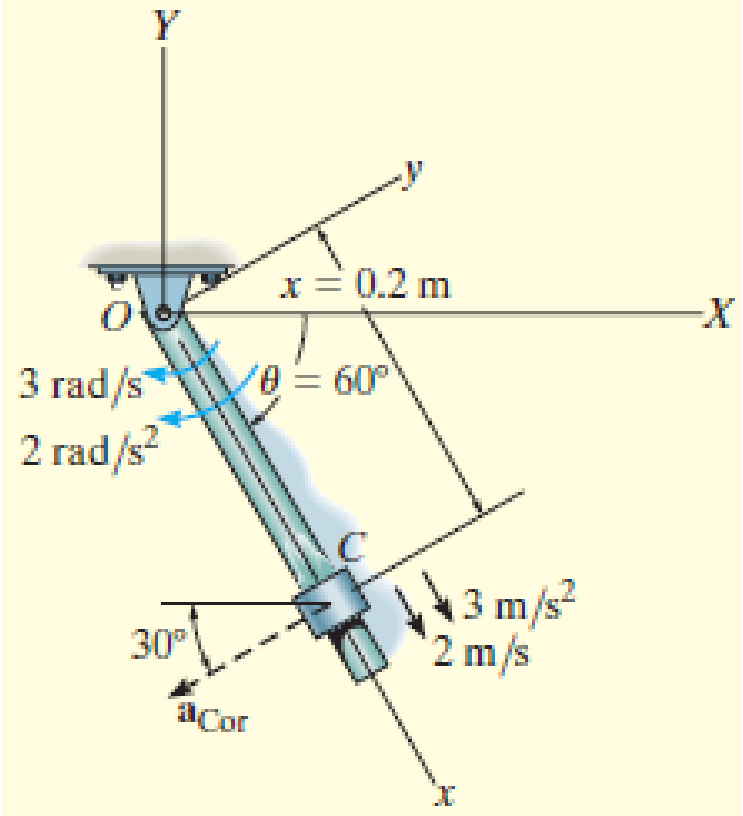
Hareketli sistemin hareketi	*C*'nin hareketli sisteme göre hareketi
$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}$ m
$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s
$\boldsymbol{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s	$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s^2
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s^2	

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Örnek 16-18

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz}$$

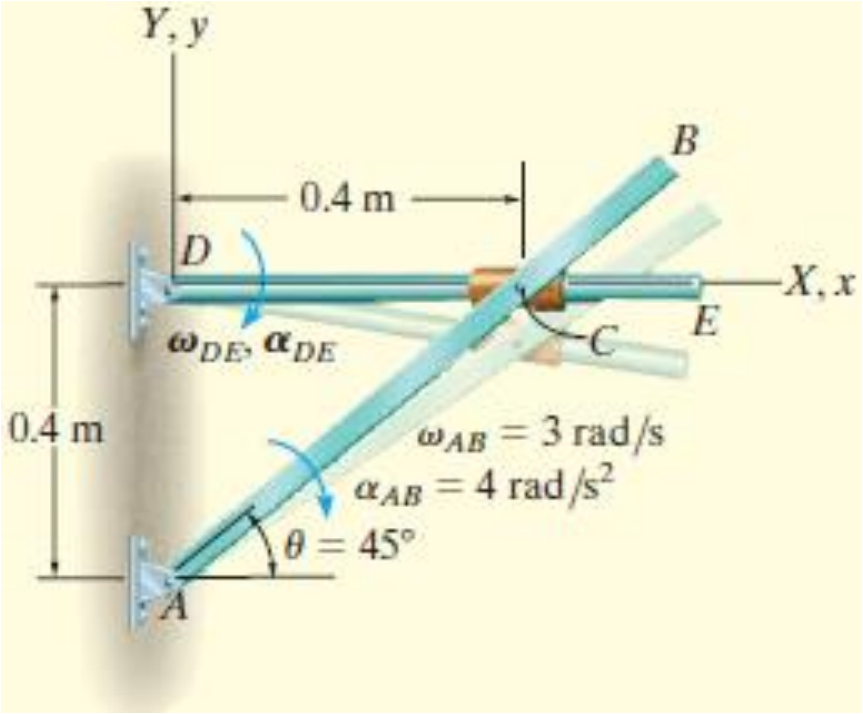


Hareketli sistemin hareketi	*C*'nin hareketli sisteme göre hareketi
$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}$ m
$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s
$\boldsymbol{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s	$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s^2
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s^2	

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\
&= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\} \text{ m/s}
\end{aligned}$$

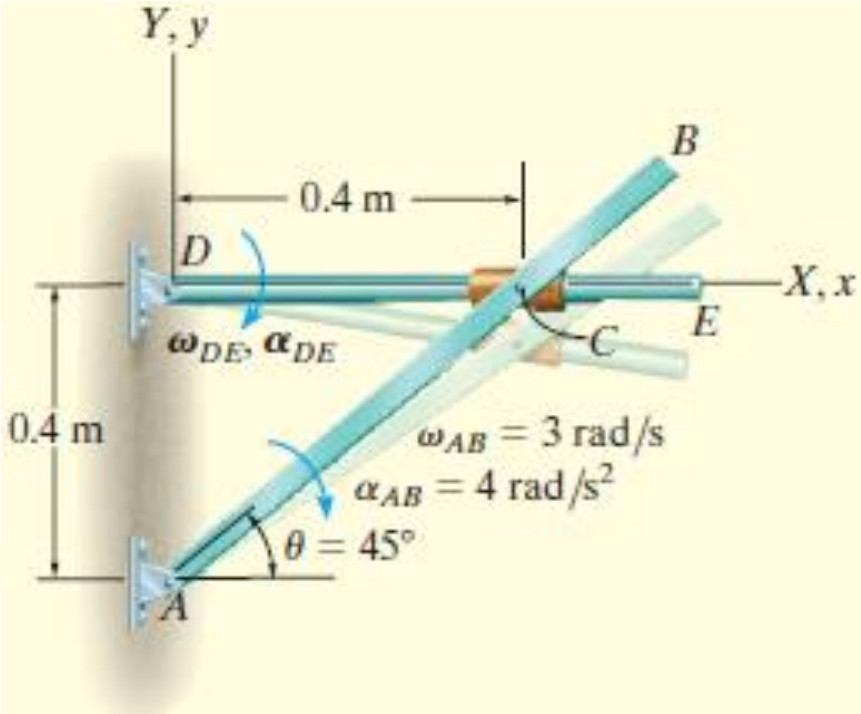
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\
&= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\
&= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2
\end{aligned}$$

Örnek 16-19



Verilen anda *DE* çubuğunun hareketini belirleyiniz. *C*'deki bilezik *AB*'ye mafsallanmıştır ve *DE* çubuğu üzerinde kaymaktadır.

Örnek 16-19



$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

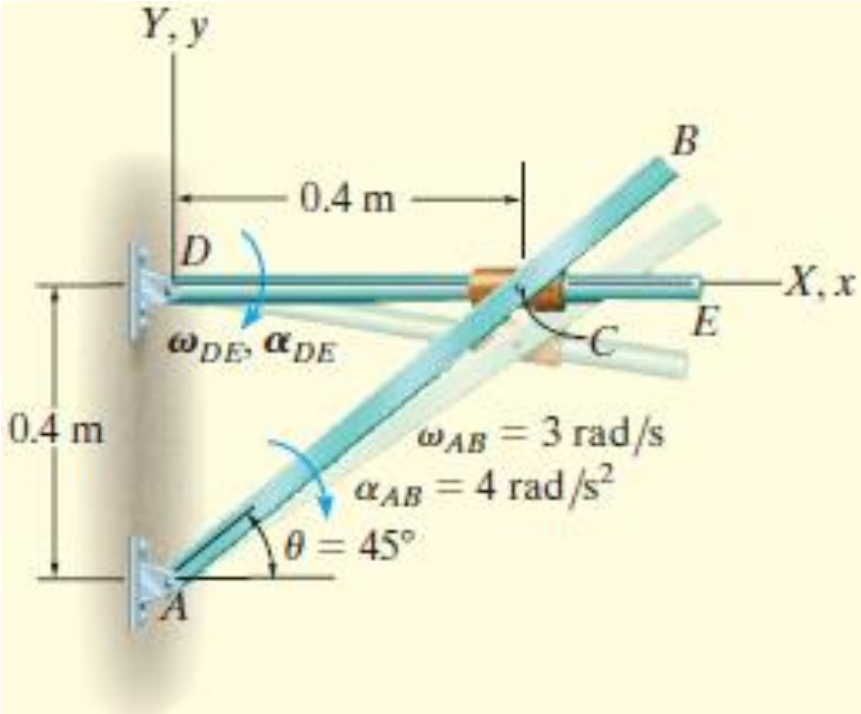
Hareketli sistemin hareketi	*C*'nin hareketli sisteme göre hareketi
$\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4\mathbf{i}\}\,\mathrm{m}$
$\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$	$(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$	

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j}\}\ \mathrm{m/s}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_{C/A}$$

$$= (-4\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) - (3)^2(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j}\}\ \mathrm{m/s^2}$$

Örnek 16-19



$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$

$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$(v_{C/D})_{xyz} = 1.2 \text{ m/s}$$

$$\omega_{DE} = 3 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

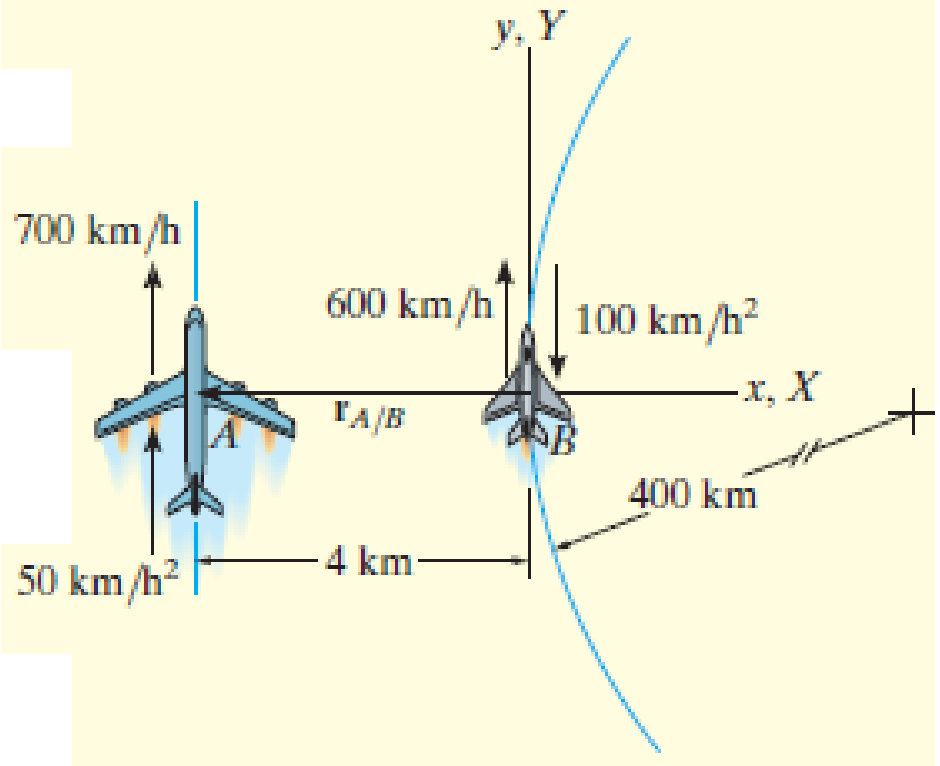
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i})]$$
$$+ 2(-3\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = -0.4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$(a_{C/D})_{xyz} = 1.6 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{DE} = -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

Örnek 16-20

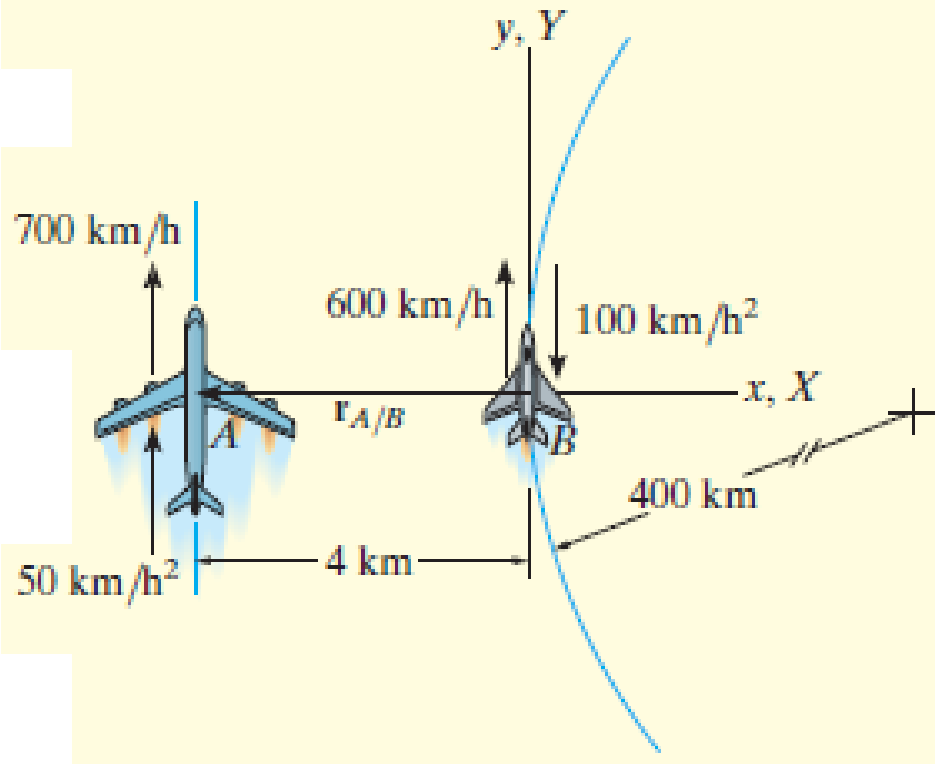


Uçaklar aynı yükseklikte uçmaktadır. *A* uçağının *B*'nin pilotu tarafından ölçülen hız ve ivmesini belirleyiniz.

Örnek 16-20

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$



$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600\ \text{km/h}}{400\ \text{km}} = 1.5\ \text{rad/h} \circlearrowright \qquad \mathbf{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}$$

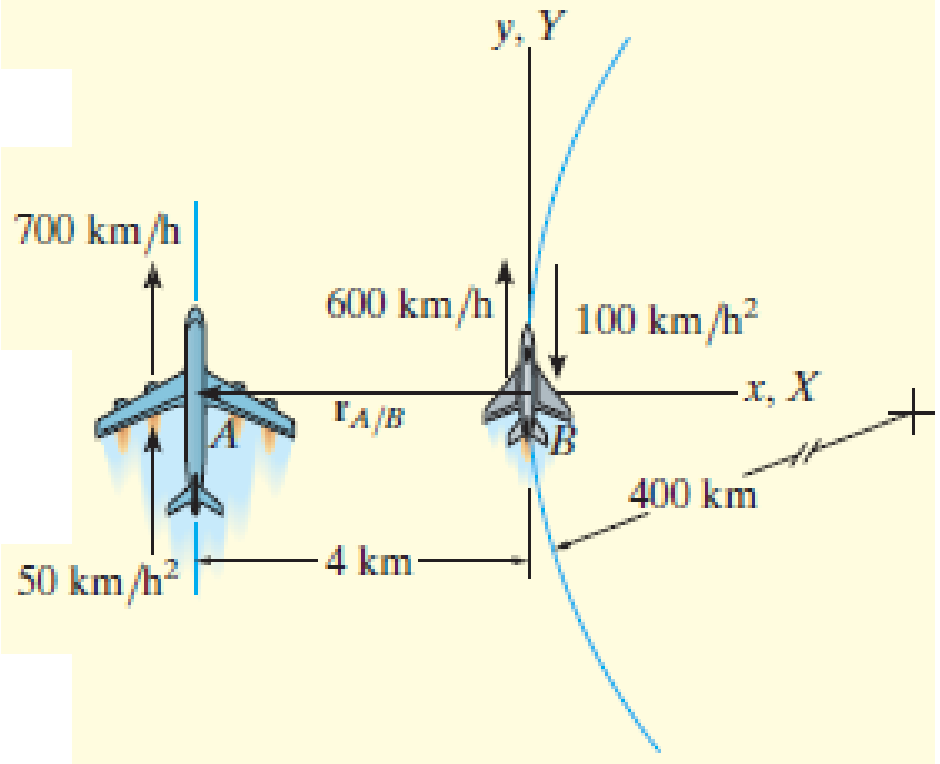
$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100\ \text{km/h}^2}{400\ \text{km}} = 0.25\ \text{rad/h}^2 \circlearrowleft \qquad \dot{\mathbf{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}^2$$

Örnek 16-20

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\}\ \text{km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$



$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\}\ \text{km/h} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})$$
$$+ (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2 \qquad \textit{Ans.}$$