Mühendislik Mekaniği
Dinamik

Yrd.Doç.Dr. Akın Ataş

Bölüm 15

Parçacık Kinetiği: İmpuls ve Momentum

Kaynak: ‘Mühendislik Mekaniği: Dinamik’, R.C.Hibbeler, S.C.Fan, Çevirenler: A. Soyuçok, Ö. Soyuçok.

15 Parçacık Kinetiği: İmpuls ve Momentum

Bu bölümde, hareket denklemi zamana göre integre edilecek ve bu şekilde impuls ve momentum ilkesi elde edilecektir.

Elde edilecek denklem kuvvet, hız ve zaman içeren problemlerin çözümünde kullanılacaktır.

Aynı zamanda impuls ve momentum ilkelerinin, çarpışma problemlerinin analizi için gerekli araçları sağladığı görülecektir.

15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

m kütleli bir parçacığın hareket denklemi:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v} \qquad \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

Bu denkleme ***lineer impuls ve momentum ilkesi*** denir. Hareket denkleminin zamana göre basit bir integrasyonu ile elde edilir.

Başlangıç hızının bilindiği ve kuvvetin sabit olduğu veya zamanın fonksiyonu olarak ifade edilebildiği durumlarda, $\mathbf{v}_2$ hızını elde etmek için kullanılır.

15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

Lineer İmpuls.

Lineer impuls ve momentum ilkesi:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

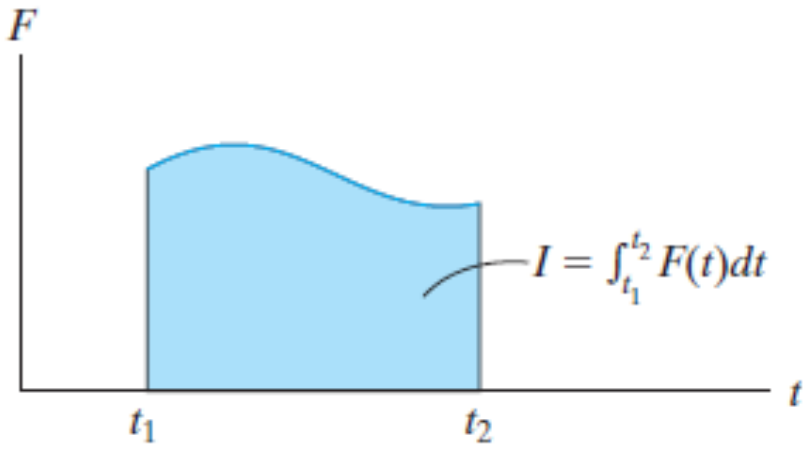
I = ∫**F***dt* integrali lineer impuls olarak tanımlanır. Kuvvetin, uygulandığı zaman boyunca etkisini ölçen vektörel bir büyüklüktür. Zaman pozitif bir skaler olduğundan, impuls vektörü kuvvetle aynı doğrultuda etki eder.

Büyüklüğü kuvvet-zaman, örneğin N.s birimine sahiptir.

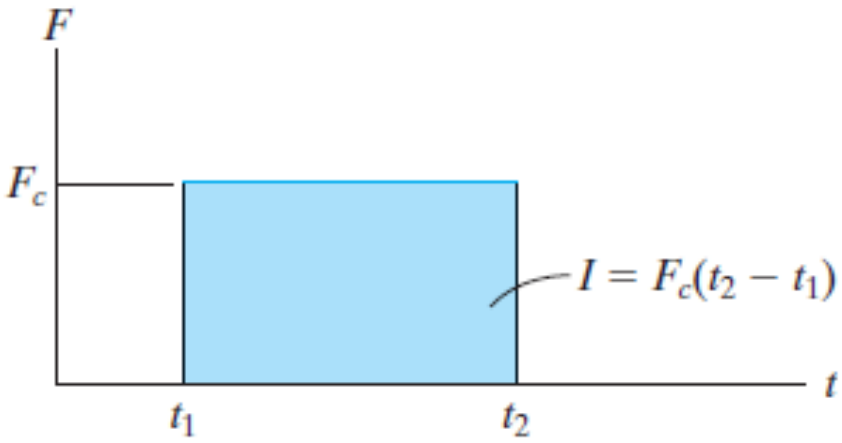
15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

Lineer İmpuls.

Kuvvet, zamanın fonksiyonu olarak ifade edilirse, impuls integralin doğrudan hesaplanması ile belirlenebilir. Kuvvetin büyüklüğü ve doğrultusu sabitse, impuls dikdörtgenin alanı ile ifade edilir.



Değişken Kuvvet



Sabit Kuvvet

15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

Lineer Momentum.

Lineer impuls ve momentum ilkesi:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

L = *m***v** formundaki iki vektörün her biri parçacığın *lineer momentumu* olarak tanımlanır. *m* pozitif bir skaler olduğundan, lineer momentum vektörü, **v** ile aynı doğrultuya sahiptir.

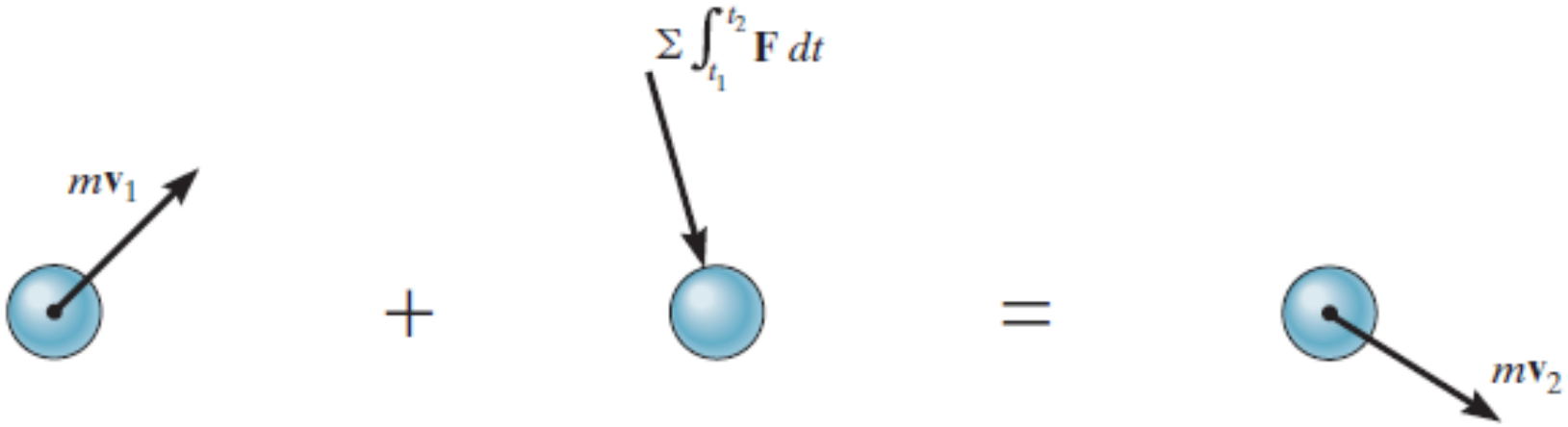
*m***v** büyüklüğü kütle-hız, örneğin kg.m/s birimine sahiptir.

15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi.

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

$$\boxed{m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2}$$



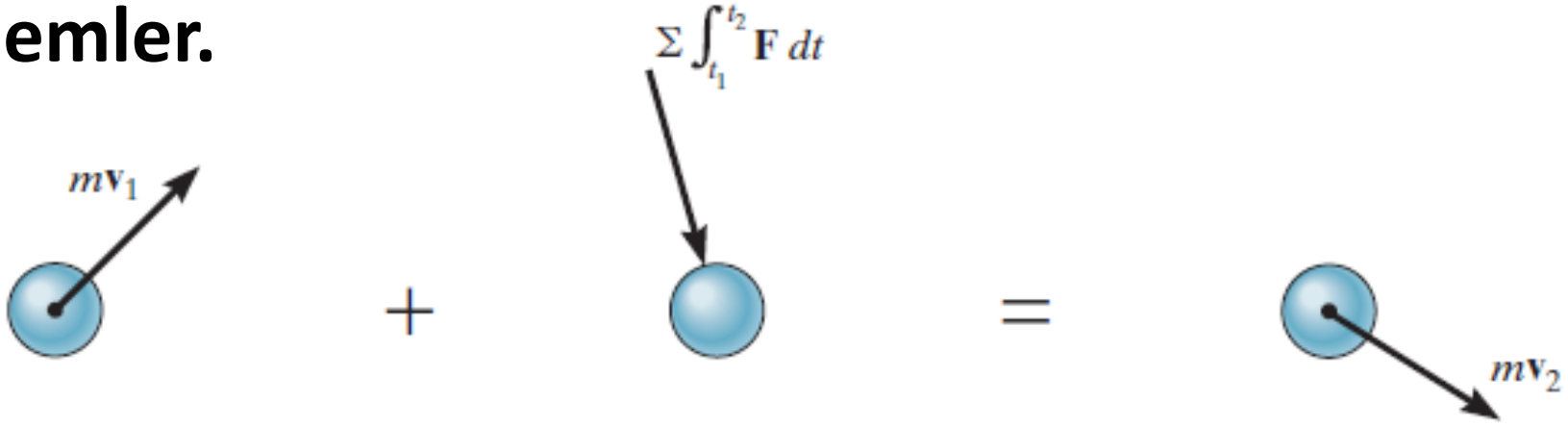
İlk momentum diyagramı

İmpuls diyagramı

Son momentum diyagramı

15.1 Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

Skaler Denklemler.



İlk momentum diyagramı

İmpuls diyagramı

Son momentum diyagramı

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

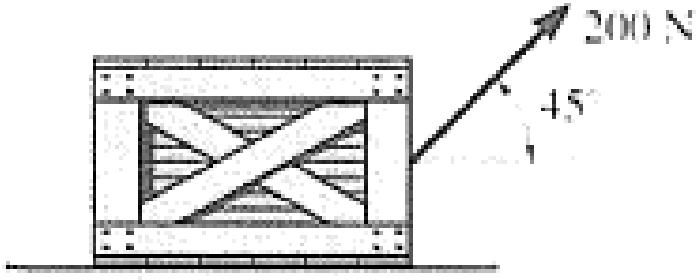
$$m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_y)_2$$

$$m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt = m(v_z)_2$$

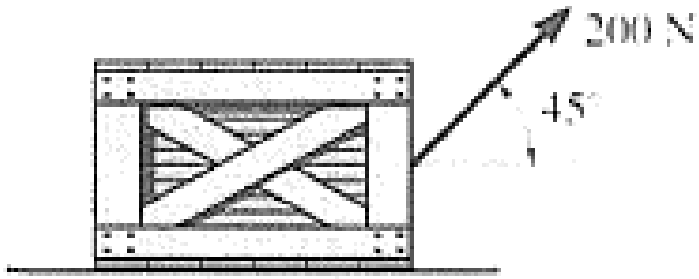
Bu denklemler parçacığın *x*, *y* ve *z* doğrultularındaki lineer impuls ve momentum ilkesini gösterir.

Örnek 15-1



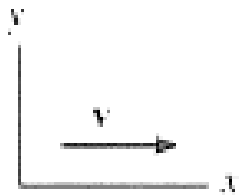
Şekildeki 100 kg'lık bir sandık pürüzsüz yatay düzlem üzerinde durmaktadır. 45°'lik bir açıyla etkiyen 200N'luk bir kuvvet 10 s süreyle uygulandığına göre, sandığın son hızını ve bu zaman aralığında sandık üzerine etkiyen yüzey kuvvetlerini belirleyiniz.

Örnek 15-1



Sandık üzerine etkiyen bütün kuvvetler sabit olduğundan, karşı gelen impuls: **I** = **F**$_c$ (t_2-t_1).

İmpuls ve Momentum İlkesi.

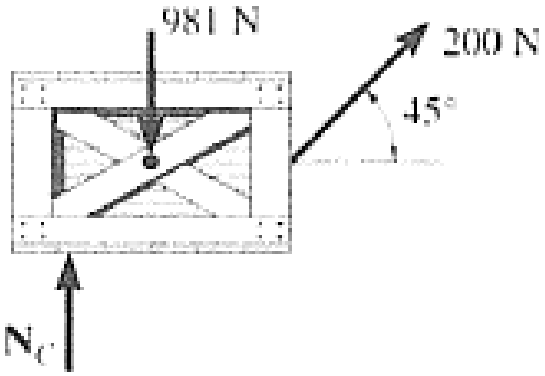


$(\overset{+}{\rightarrow})$

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200 \text{ N}(10 \text{ s}) \cos 45° = (100) \text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 14.1 \text{ m/s} \rightarrow$$



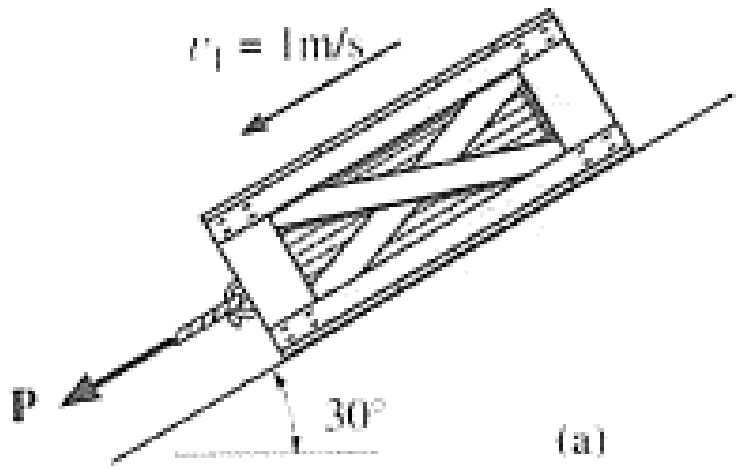
$(+\uparrow)$

$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10 \text{ s}) - 981 \text{ N}(10 \text{ s}) + 200 \text{ N}(10 \text{ s}) \sin 45° = 0$$

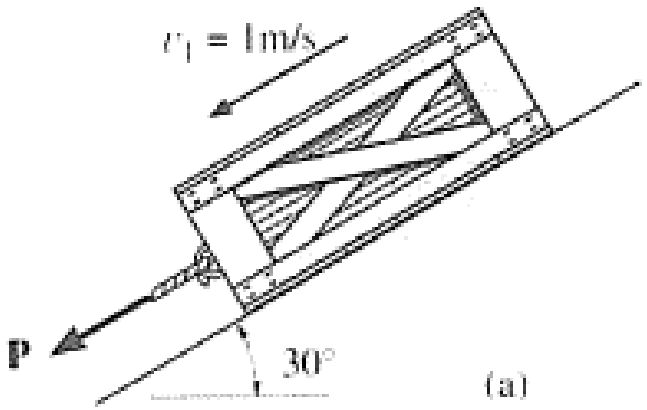
$$N_C = 840 \text{ N}$$

Örnek 15-2

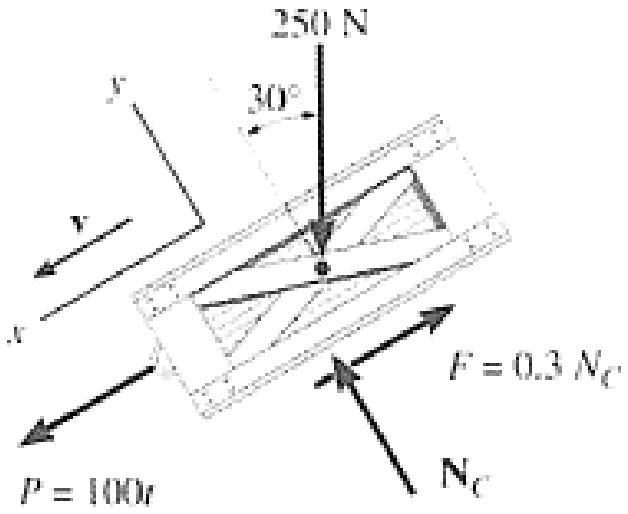


Şekildeki 250 N'luk sandık, P = (100t) N değişken büyüklüğüne sahip bir kuvvet etkisi altındadır. Sandığın P uygulandıktan 2s sonraki hızını belirleyiniz. Sandık, düzlemden aşağıya doğru v_1 = 1 m/s'lik başlangıç hızına sahiptir. Sandık ile düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k = 0.3'tür.

Örnek 15-2



(a)



P kuvvetinin büyüklüğü zamanla değiştiğinden, ortaya çıkan impuls integral ile belirlenir.

***İmpuls ve Momentum İlkesi*.**

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

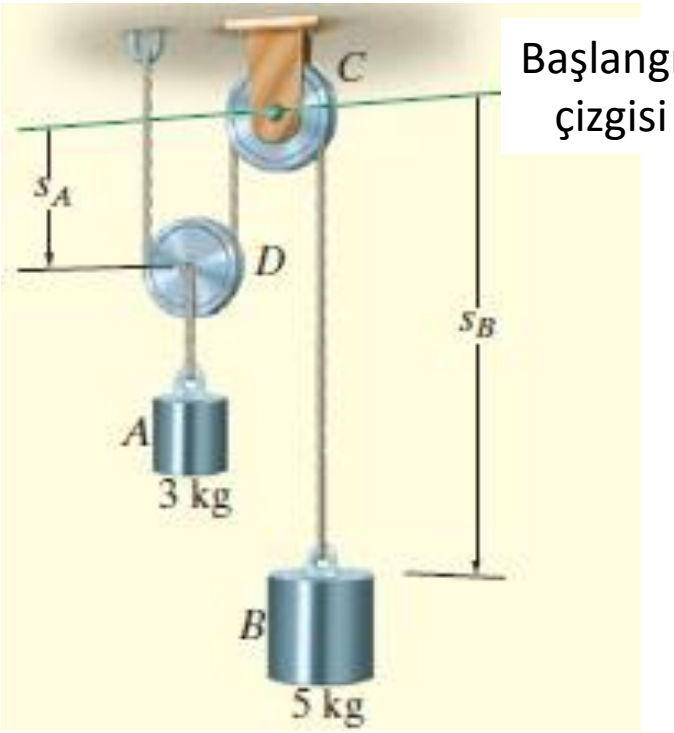
$$\frac{250\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(1\text{ m/s}) + \int_0^2 100t\, dt - 0.3N_C(2\text{ s}) + (250\text{ N})(2\text{ s})\sin 30° = \frac{250\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2} v_2$$

$$25.5 + 200 - 0.6N_C + 250 = 25.5v_2$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0; \qquad N_C - 250\cos 30°\text{ N} = 0 \qquad N_C = 216.5\text{ N}$$

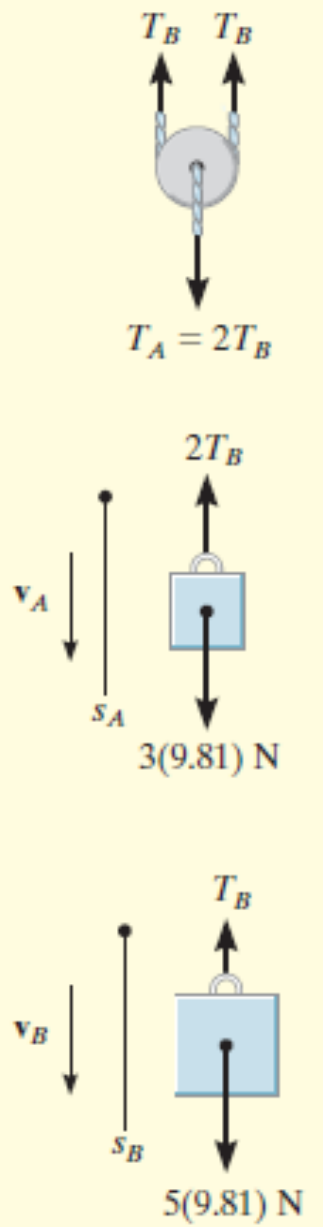
$$v_2 = 13.6\text{ m/s} \swarrow$$

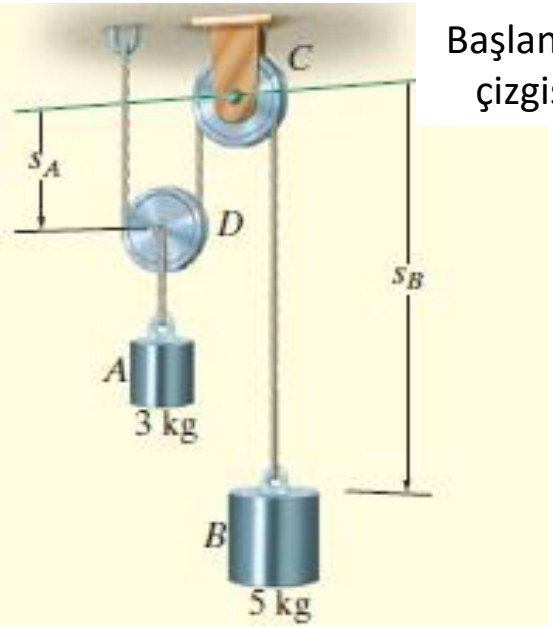
Örnek 15-3



Şekildeki *A* ve *B* bloklarının kütleleri, sırasıyla, 3 ve 5 kg'dır. Sistem, durmaktayken serbest bırakıldığına göre, *B* bloğunun 6s sonraki hızını belirleyiniz. İp ve makaraların kütlesini ihmal ediniz.

Örnek 15-3





Başlangıç çizgisi

İmpuls ve Momentum İlkesi.

A Bloğu.

$(+\downarrow)$

$$m(v_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_A)_2$$

$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2$$

B Bloğu.

$(+\downarrow)$

$$m(v_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2$$

Kinematik.

$$2s_A + s_B = l \qquad 2v_A = -v_B$$

$$(v_B)_2 = 35.8\text{ m/s} \downarrow$$

$$T_B = 19.2\text{ N}$$

15.2 Parçacık Sitemleri için Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

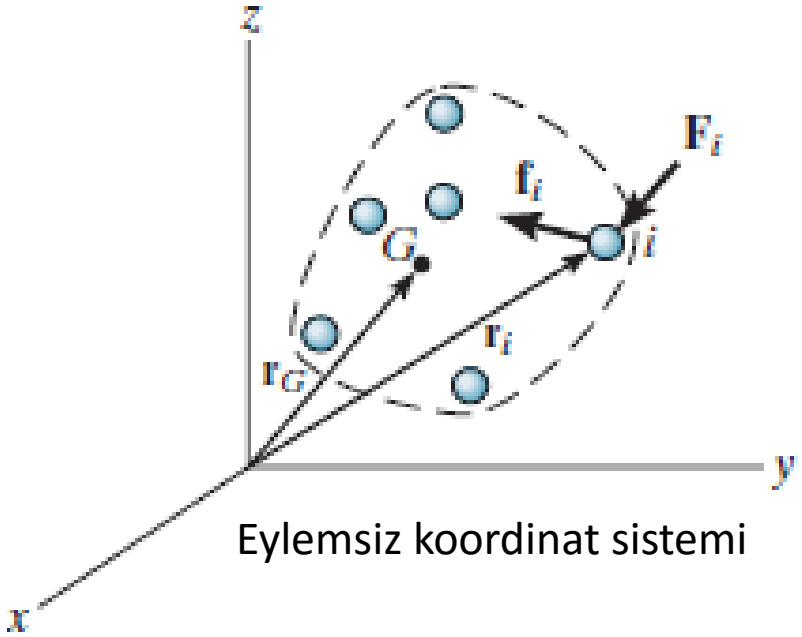
Lineer impuls ve momentum ilkesi, eylemsiz bir referans sistemine göre hareketli bir parçacık sistemi için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

$$\boxed{\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2}$$

$$m = \Sigma m_i \qquad m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i,$$

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i \qquad m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$



Eylemsiz koordinat sistemi

15.3 Parçacık Sistemleri için Lineer Momentumun Korunumu

Bir parçacık sistemi üzerine etkiyen dış kuvvetlerin impulslarının toplamı sıfır olduğu zaman, soldaki denklem sağdakine dönüşür:

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

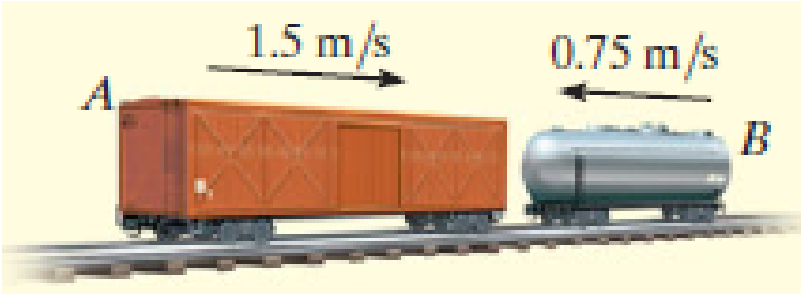
$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

Bu denklem, *lineer momentumun korunumu* olarak anılır. Bir parçacık sistemi için lineer momentumun vektörel toplamının t_1 - t_2 zaman aralığında sabit kaldığını ifade eder.

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i \qquad (\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2$$

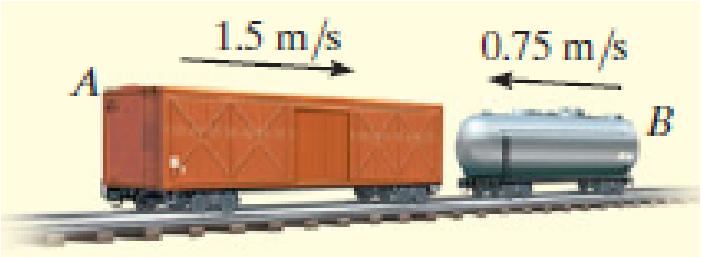
Parçacık sisteminin ağırlık merkezinin hızı, dış impuls uygulanmadığında değişmez.

Örnek 15-4



15 Mg'lık *A* yük vagonu, 12 Mg'lık bir kütleye sahip olan ve 0.75 m/s'lik bir hızla yatay bir yol üzerinde hareket eden *B* tankeri ile karşılaştığında, 1.5 m/s'lik bir hızla tankere doğru serbestçe hareket etmektedir. Vagonlar çarpıştığına ve birlikte hareket ettiğine göre,
(a) vagon ve tankerin birleşme anındaki hızlarını, (b) birleşmenin 0.8s sürmesi halinde aralarındaki ortalama kuvveti belirleyiniz.

Örnek 15-4

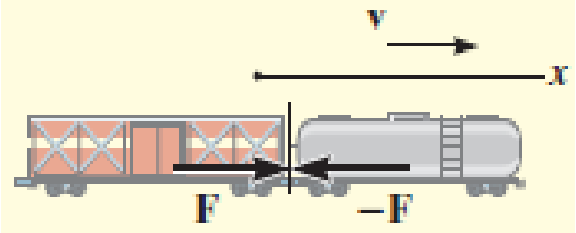


a) Lineer Momentumun Korunumu.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

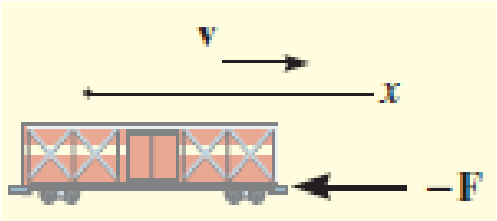
$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - 12\,000\text{ kg}(0.75\text{ m/s}) = (27\,000\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.5\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$



b) İmpuls ve Momentum İlkesi.

$$\int F\,dt = F_{avg}\,\Delta t = F_{avg}(0.8\text{ s})$$



$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + \Sigma\int F\,dt = m_A v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - F_{avg}(0.8\text{ s}) = (15\,000\text{ kg})(0.5\text{ m/s})$$

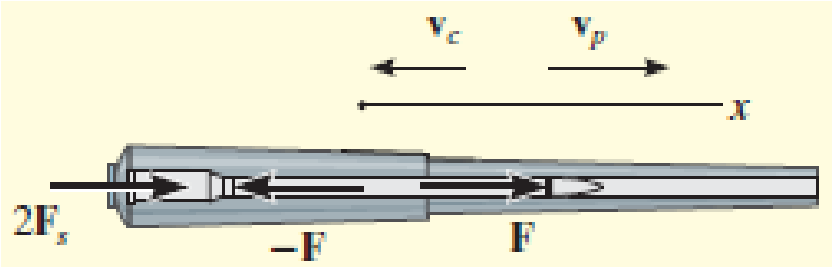
$$F_{avg} = 18.8\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

Örnek 15-5

6000 N'luk top, 40 N'luk bir mermiyi yere göre 450 m/s'lik bir çıkış hızıyla ateşlemektedir. Ateşleme 0.03s'de gerçekleştiğine göre,
(a) topun ateşlemeden hemen sonraki geri tepme hızını, (b) mermiye etki eden ortalama impulsif kuvveti belirleyiniz. Top desteği yerde sabit olup topun yatay geri tepmesi iki yay tarafından emilmektedir.

Örnek 15-5

a) Lineer Momentumun Korunumu.

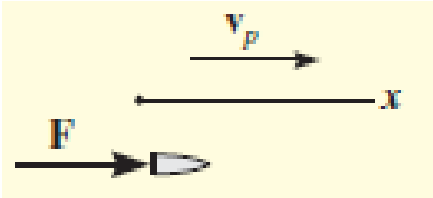


$$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\frac{6000\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(v_c)_2 + \frac{40\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(450\text{ m/s})$$

$$(v_c)_2 = 3\text{ m/s} \leftarrow$$

b) İmpuls ve Momentum İlkesi.



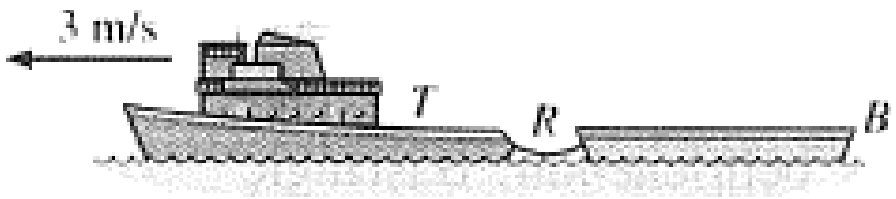
$$\int F\,dt = F_{ort}\,\Delta t = F_{ort}\,(0.03)$$

$$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_p)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_p)_2$$

$$0 + F_{ort}(0.03\text{ s}) = \frac{40\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(450\text{ m/s})$$

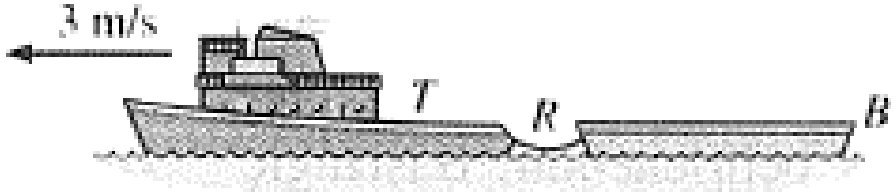
$$F_{ort} = 61.2(10^3)\text{ N} = 61.2\text{ kN}$$

Örnek 15-6



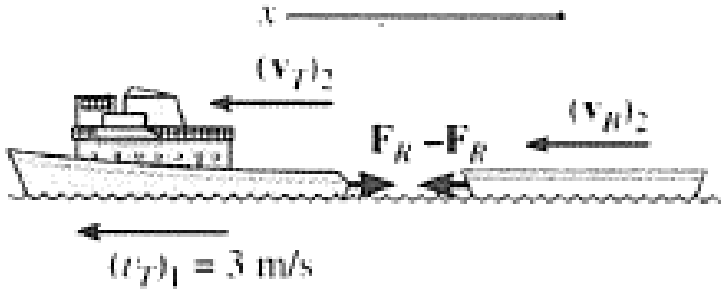
350 Mg'lık *T* römorkörü bir *R* ipiyle 50 Mg'lık *B* mavnasını çekmektedir. Mavna başlangıçta durağan halde bulunduğuna ve römorkör ip gevşekken $(v_T)_1$ = 3 m/s hızıyla serbestçe hareket ettiğine göre, römorkörün ip gergin hale geldiği andaki hızını belirleyiniz. İpin uzamadığını varsayınız. Suyun sürtünme etkilerini ihmal ediniz.

Örnek 15-6



Momentumun Korunumu.

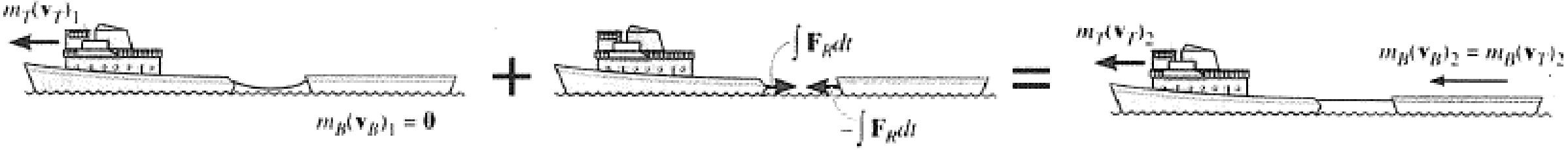
$$(v_B)_2 = (v_T)_2$$



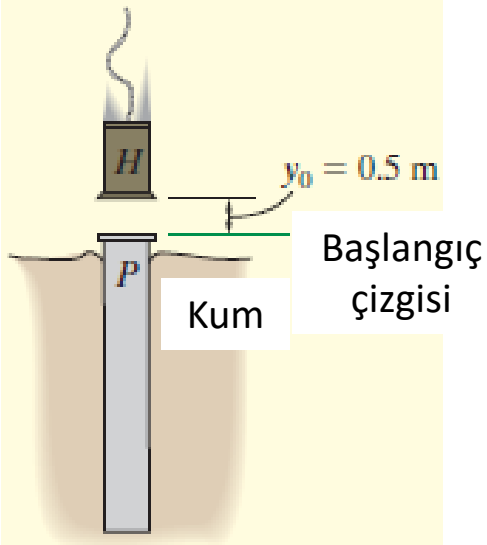
$$(\overset{+}{\leftarrow})\quad m_T(v_T)_1 + m_B(v_B)_1 = m_T(v_T)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$350(10^3)\ \text{kg}(3\ \text{m/s}) + 0 = 350(10^3)\ \text{kg}(v_T)_2 + 50(10^3)\ \text{kg}(v_T)_2$$

$$(v_T)_2 = 2.62\ \text{m/s} \leftarrow$$



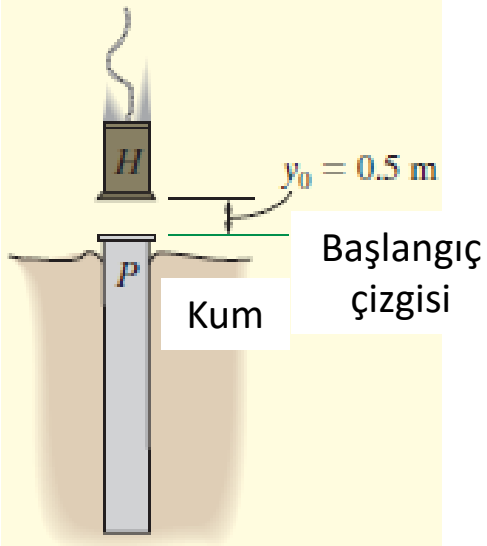
Örnek 15-7



Rijit bir *P* kazığı, 800 kg'lık kütleye sahiptir ve 300 kg kütleli bir *H* çekici kullanılarak yere çakılmaktadır. Çekiç, 0.5 m yükseklikte durağan halden harekete geçerek kazığın tepesine çarpmaktadır. Kazık gevşek bir kum tabakasıyla sarıldığına ve çarpmadan sonra çekiç geri sıçramadığına göre, çekicin kazığa verdiği impulsu belirleyiniz.

Örnek 15-7

Enerjinin Korunumu.



$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

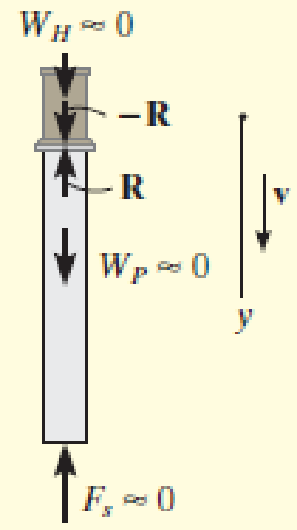
$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81)\ \text{N}(0.5\ \text{m}) = \frac{1}{2}(300\ \text{kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.132\ \text{m/s}$$

Momentumun Korunumu.

$$(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$$

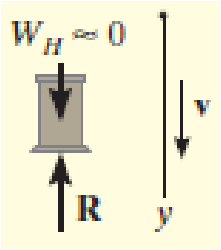


$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$

$$(300\ \text{kg})(3.132\ \text{m/s}) + 0 = (300\ \text{kg})v_2 + (800\ \text{kg})v_2$$

$$v_2 = 0.8542\ \text{m/s}$$

İmpuls ve Momentum İlkesi.



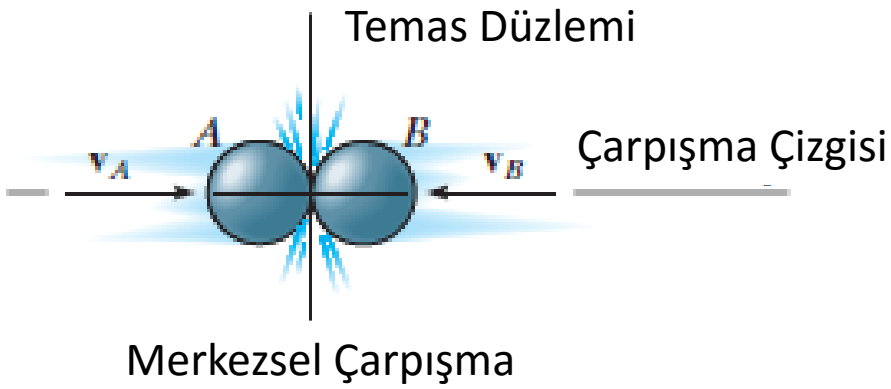
$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m_H v_2$$

$$(300\ \text{kg})(3.132\ \text{m/s}) - \int R\, dt = (300\ \text{kg})(0.8542\ \text{m/s})$$

$$\int R\, dt = 683\ \text{N}\cdot\text{s}$$

15.4 Çarpışma

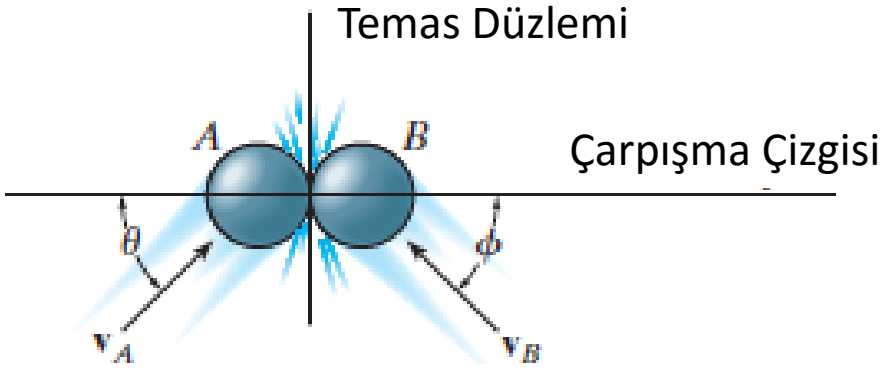
İki cisim çok kısa bir zaman aralığında aralarında nispeten büyük (impulsif) kuvvetler ortaya çıkmasına neden olacak şekilde birbirine temas ettiğinde *çarpışma* oluşur.



Çarpışan iki parçacığın kütle merkezleri, parçacıkların kütle merkezlerinden geçen çizgi boyunca hareket ediyorsa *merkezsel* çarpışma olur. Bu çizgiye *çarpışma çizgisi* denir.

15.4 Çarpışma

Parçacıkların biri ya da her ikisinin hareketinin doğrultusu çarpışma çizgisi ile bir açı yapıyorsa, buna *eğik çarpışma* denir.

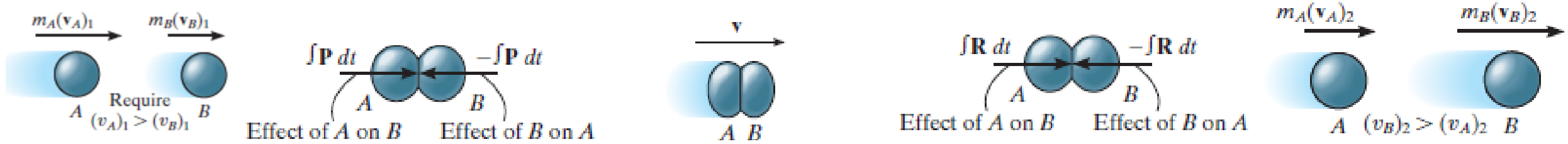


Eğik Çarpışma

15.4 Çarpışma

Merkezsel Çarpışma.

Çarpışma mekaniğinin analiz yöntemini, şekilde görülen pürüzsüz *A* ve *B* parçacıklarıklarının merkezsel çarpışması ile açıklayalım.



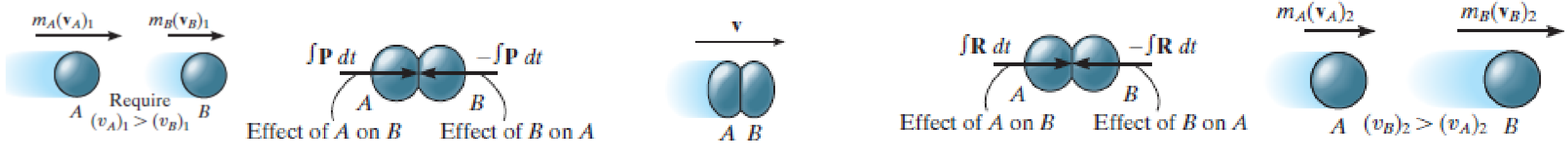
Çarpışmadan önce (1) | Deformasyon impulsu (2) | Maksimum deformasyon (3) | Geri dönme impulsu (4) | Çarpışma sonrası (5)

1. $(v_A)_1 > (v_B)_1$ koşulu ile çarpışma daima oluşur.
2. Parçacıklar bir deformasyon periyoduna maruz kalacaklardır.
3. Her iki parçacık sadece maksimum deformasyon anında birlikte hareket edecektir.

15.4 Çarpışma

Merkezsel Çarpışma.

Çarpışma mekaniğinin analiz yöntemini, şekilde görülen pürüzsüz A ve B parçacıklarıklarının merkezsel çarpışması ile açıklayalım.



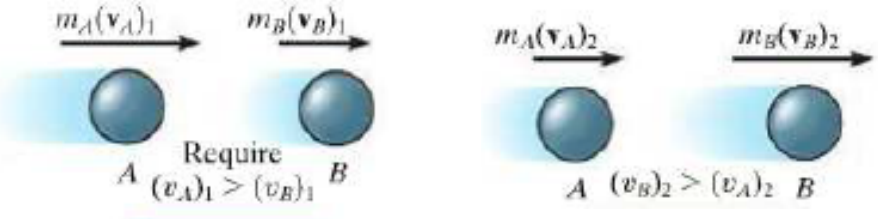
Çarpışmadan önce (1) | Deformasyon impulsu (2) | Maksimum deformasyon (3) | Geri dönme impulsu (4) | Çarpışma sonrası (5)

4. Ardından, parçacıkların orijinal şekline döneceği bir geri dönme periyodu oluşur.
5. Çarpışma sonrası parçalar ayrıldıktan sonra, $(v_B)_2 > (v_A)_2$ olur.

15.4 Çarpışma

Merkezsel Çarpışma.

Çoğu durumda başlangıç hızları bilinir ve son hızları belirlemek gerekir. Çarpışma esnasında deformasyonun ve geri dönmenin iç impulsları birbirini yok ettiğinden, parçacık sistemi için *momentum korunur*.



Çarpışmadan önce (1)

Çarpışma sonrası (5)

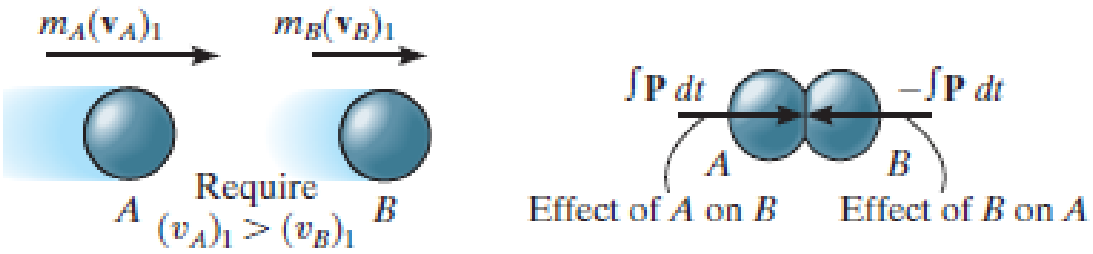
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

15.4 Çarpışma

Merkezsel Çarpışma.

$(v_A)_2$ ve $(v_B)_2$'yi çözmek için gerekli ikinci denklem, her bir parçacığa impuls ve momentum ilkesi uygulanarak elde edilebilir.

A parçacığı için ***deformasyon fazında***,



Çarpışmadan önce (1) | Deformasyon impulsu (2) | Maksimum deformasyon (3)

$(\overset{+}{\rightarrow})$

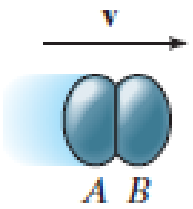
$$m_A(v_A)_1 - \int P\,dt = m_A v$$

15.4 Çarpışma

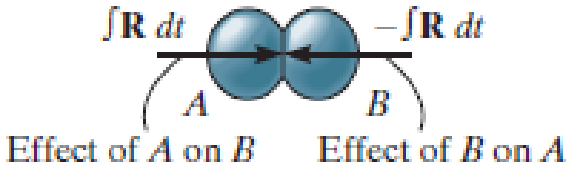
Merkezsel Çarpışma.

$(v_A)_2$ve $(v_B)_2$'yi çözmek için gerekli ikinci denklem, her bir parçacığa impuls ve momentum ilkesi uygulanarak elde edilebilir.

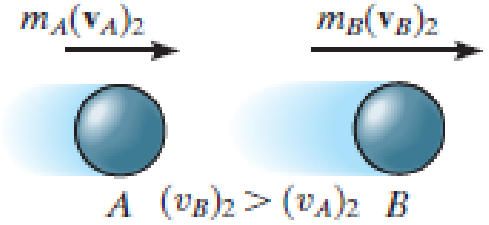
A parçacığı için ***geri dönme fazında***,



Maksimum deformasyon
(3)



Geri dönme impulsu
(4)



Çarpışma sonrası
(5)

$(\overset{+}{\rightarrow})$

$$m_A v - \int R\,dt = m_A (v_A)_2$$

15.4 Çarpışma

Merkezsel Çarpışma.

Geri dönme impulsunun deformasyon impulsuna oranına *geri dönme katsayısı* (*e*) denir. *A* parçacığı için:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

B parçacığı için:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}}$$

15.4 Çarpışma

Geri Dönme Katsayısı.

Geri dönme impulsunun deformasyon impulsuna oranına *geri dönme katsayısı* (*e*) denir.

Parçacıkların, çarpışmadan hemen sonraki $(v_B)_2$-$(v_A)_2$ ayrılma bağıl hızının, çarpışmanın hemen öncesindeki $(v_A)_1$-$(v_B)_1$ yaklaşma bağıl hızına oranına eşittir.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}}$$

15.4 Çarpışma

Geri Dönme Katsayısı.

Geri dönme katsayısı (*e*) genellikle sıfır ile bir arasında değere sahiptir.

Elastik Çarpışma (*e* = *1*). Deformasyon impulsu geri dönme impulsuna eşit ama zıt yönlüdür. Gerçekte mümkün olmaz.

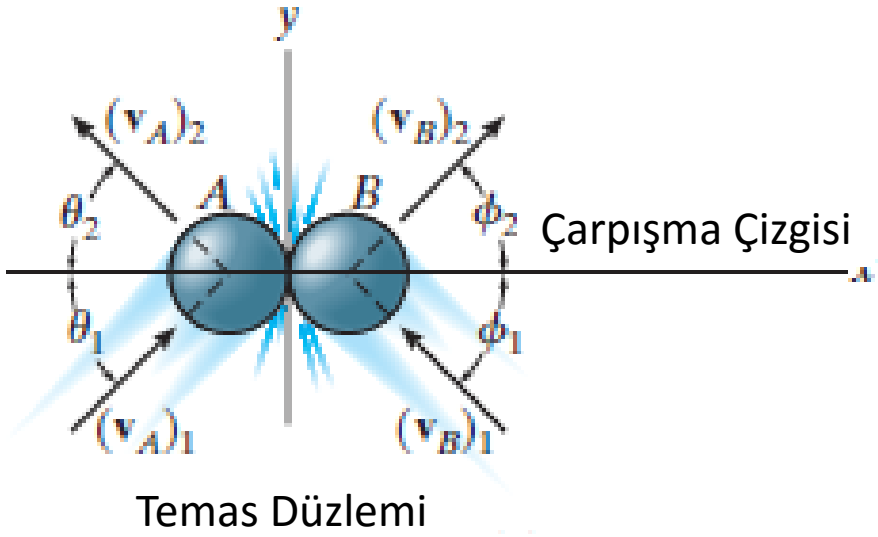
Plastik Çarpışma (*e* = *0*). Geri dönme impulsu yoktur. Çarpışmadan sonra parçacıklar birleşir veya birbirine yapışır ve ortak hızla hareket eder.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}}$$

15.4 Çarpışma

Eğik Çarpışma.

Pürüzsüz A ve B parçacıkları arasında eğik çarpışma meydana gelirse, parçacıklar büyüklüğü ve doğrultusu bilinmeyen hızlarla birbirinden ayrılırlar.

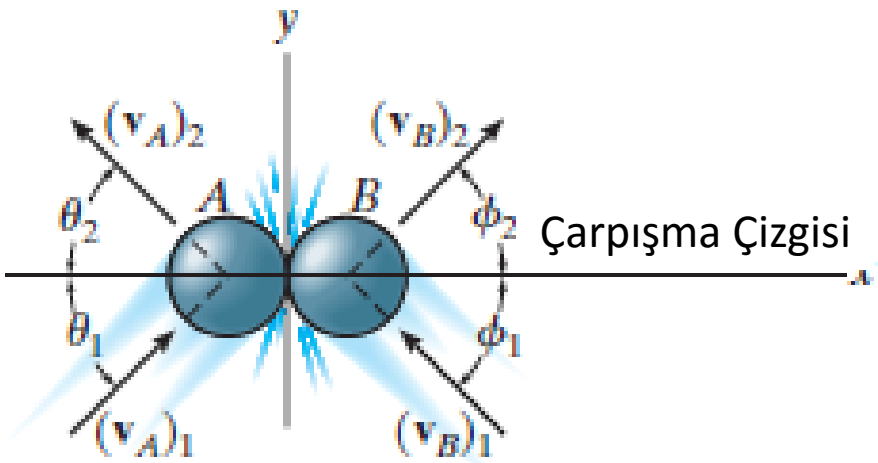


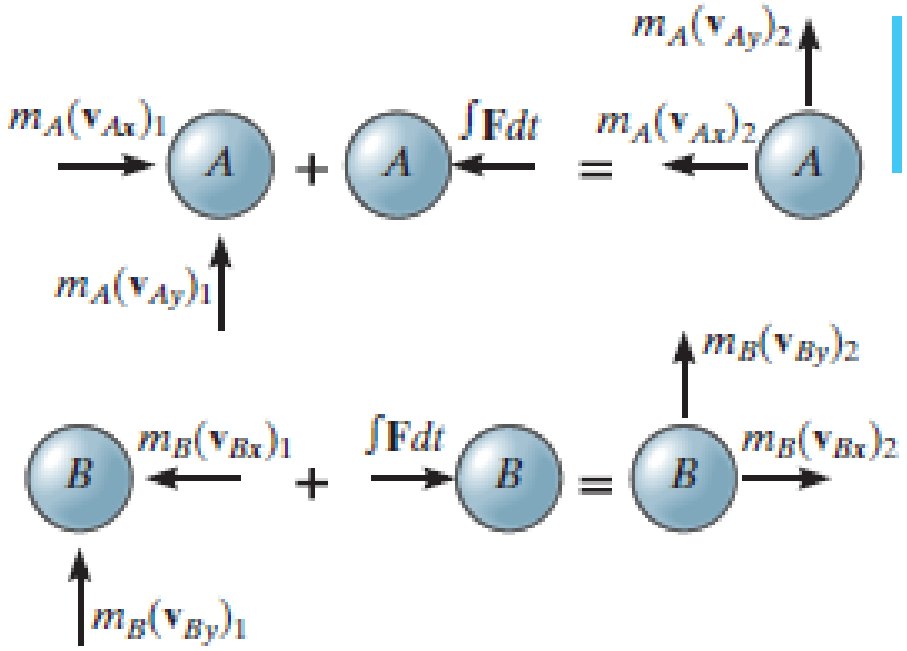
$(v_A)_1$ ve $(v_B)_1$ ve doğrultuları bilinirse, $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, θ_2 ve ϕ_2 olarak ya da son hızların *x* ve *y* bileşenleri olarak dört bilinmeyen vardır.

15.4 Çarpışma

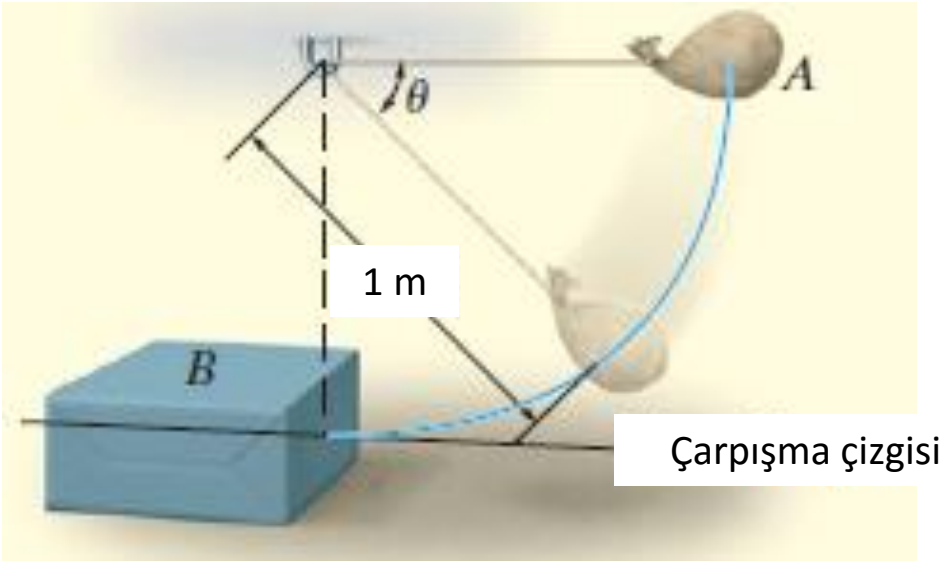
Eğik Çarpışma.

y ekseni temas düzlemi içinde ve *x* ekseni çarpışma çizgisi boyunca oluşturulursa, deformasyon ve geri dönme impulsif kuvvetleri sadece *x* doğrultusunda etkir. Hız ve momentum vektörlerini x ve y eksenleri doğrultusunda bileşenlerine ayırarak dört bağımsız skaler denklem yazmak mümkündür.



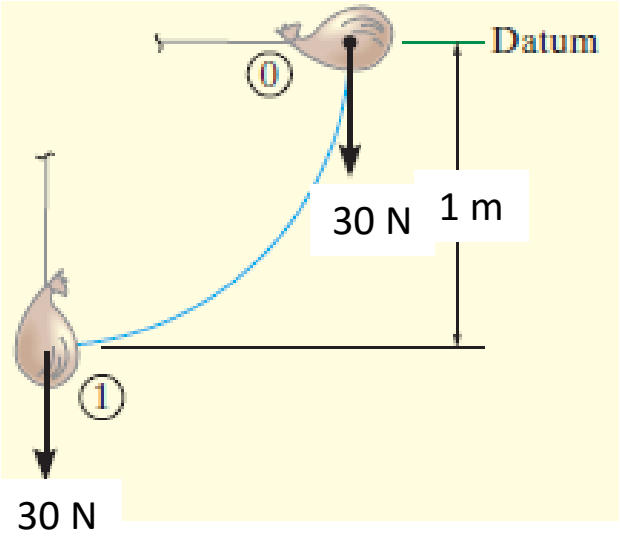


Örnek 15-9



30 N ağırlığındaki *A* torbası, θ = 0˚ konumunda durmakta iken serbest bırakılıyor. Torba θ = 90˚ konumuna düştükten sonra, 90 N'luk *B* kutusuna çarpıyor. Torba ve kutu arasındaki geri dönme katsayısı *e* = 0.5 olduğuna göre, torba ve kutunun çarpışmadan hemen sonraki hızlarını ve çarpışma sırasındaki enerji kaybını belirleyiniz.

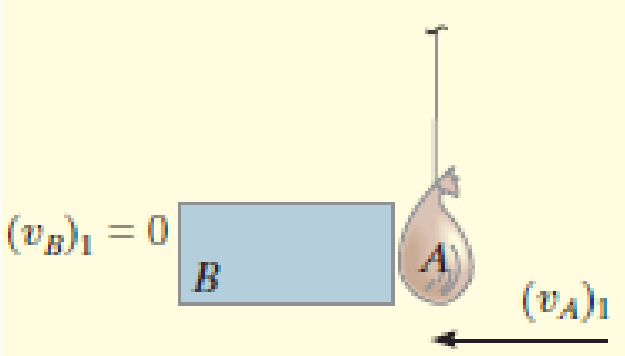
Örnek 15-9



Enerjinin Korunumu.

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{30\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 30\text{ N}(1\text{ m}); \quad (v_A)_1 = 4.43\text{ m/s}$$



Momentumun Korunumu.

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \frac{30\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(4.43\text{ m/s}) = \frac{90\text{N}}{9.81\text{ m/s}^2}(v_B)_2 + \frac{30\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2}(v_A)_2$$

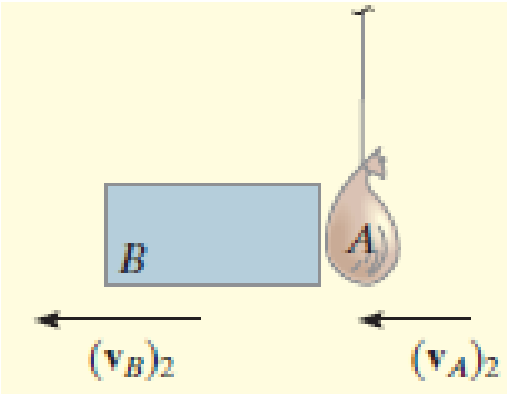
$$(v_A)_2 = 4.43 - 3(v_B)_2$$

Örnek 15-9

Geri Dönme Katsayısı.

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{4.43 \text{ m/s} - 0}$$

$$(v_B)_2 = (v_A)_2 - 2.22$$



$$(v_A)_2 = -0.55 \text{ m/s} = 0.55 \text{ m/s} \rightarrow \qquad (v_B)_2 = 1.66 \text{ m/s} \leftarrow$$

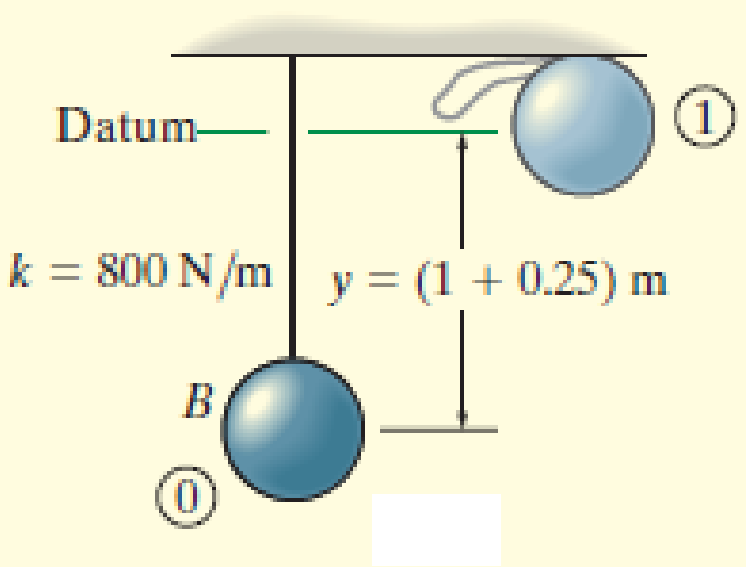
Enerji Kaybı.

$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{90 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)(1.66 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{30 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)(0.55 \text{ m/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{30 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)(4.43 \text{ m/s})^2\right]$$

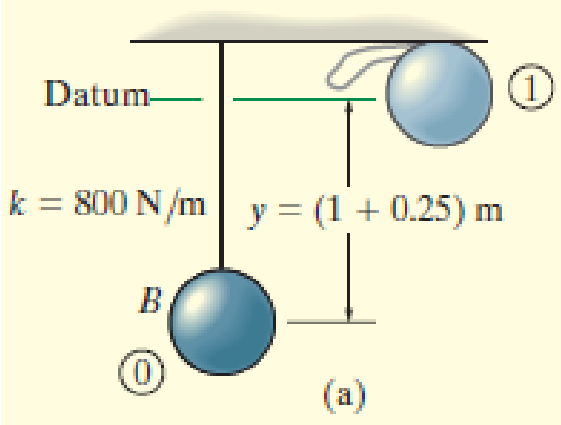
$$\Sigma U_{1-2} = -16.9 \text{ J}$$

Örnek 15-10



1.5 kg kütleye sahip top 1 m uzunluğundaki elastik iple duvara asılıdır. İp aşağı doğru 0.25 m uzatıldığına ve top durağan haldeyken bırakıldığına göre, topun tavana çarpıp dönmesinden sonra ipin ne kadar uzadığını belirleyiniz. Kordon katsayısı k = 800 N/m ve top ile tavan arasındaki geri dönme katsayısı e = 0.8'dir. Top tavanla merkezsel çarpışma yapmaktadır.

Örnek 15-10



Enerjinin Korunumu.

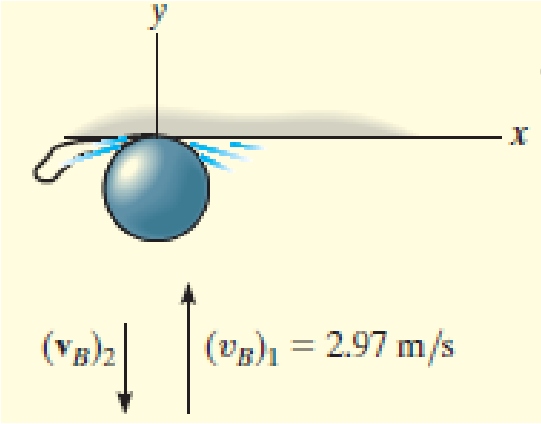
$$y = y_0 = (1 + 0.25)\ \text{m} = 1.25\ \text{m},$$

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$

$$0 - 1.5(9.81)\text{N}(1.25\ \text{m}) + \tfrac{1}{2}(800\ \text{N/m})(0.25\ \text{m})^2 = \tfrac{1}{2}(1.5\ \text{kg})(v_B)_1^2$$

$$(v_B)_1 = 2.968\ \text{m/s} \uparrow$$



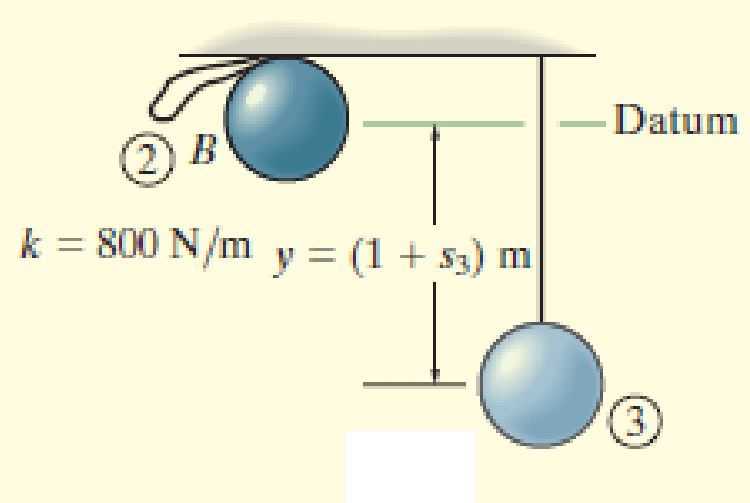
Geri Dönme Katsayısı.

$$(+\uparrow) \quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.968\ \text{m/s}}$$

$$(v_B)_2 = -2.374\ \text{m/s} = 2.374\ \text{m/s} \downarrow$$

Örnek 15-10

Enerjinin Korunumu.



$$y = y_3 = (1 + s_3)\ \text{m},$$

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

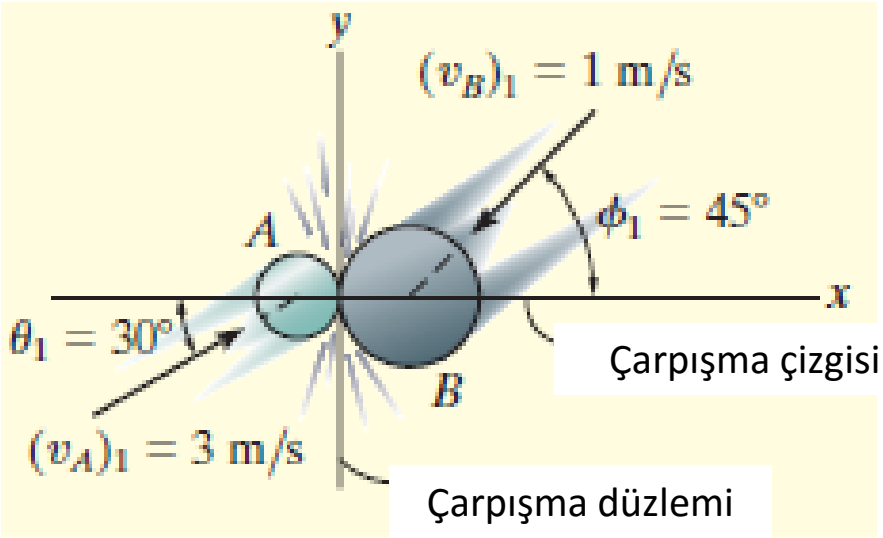
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \tfrac{1}{2}k s_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}(1.5\ \text{kg})(2.37\ \text{m/s})^2 = 0 - 9.81(1.5)\ \text{N}(1\ \text{m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\ \text{N/m})s_3^2$$

$$400 s_3^2 - 14.715 s_3 - 18.94 = 0$$

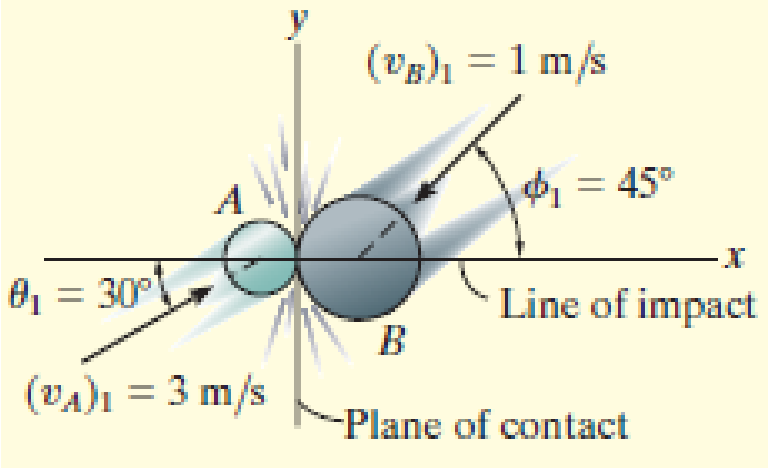
$$s_3 = 0.237\ \text{m} = 237\ \text{mm}$$

Örnek 15-11



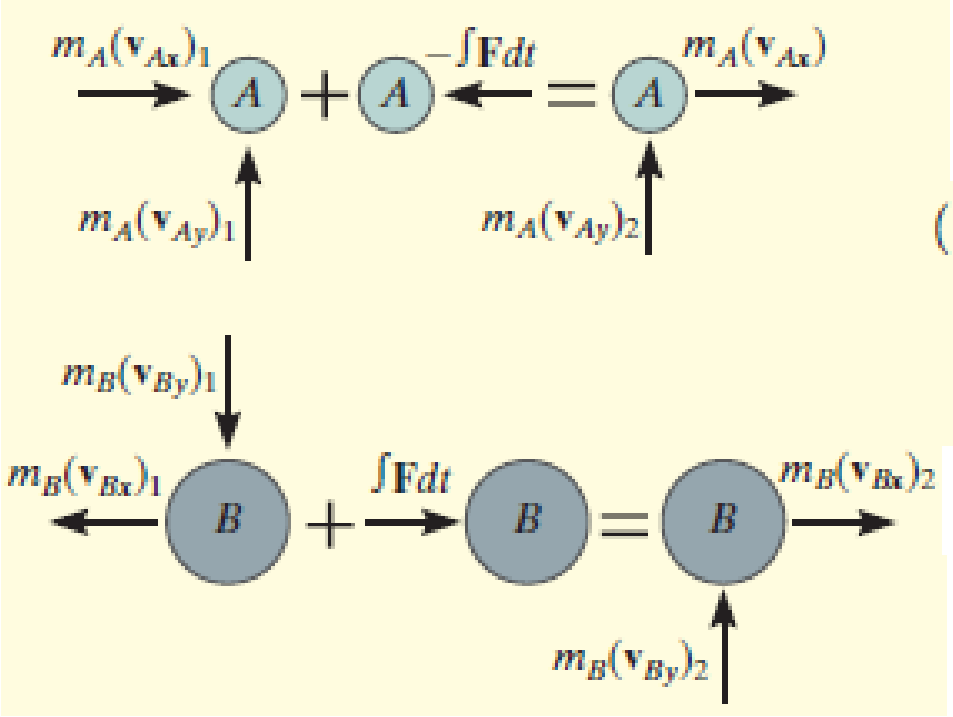
Kütleleri sırasıyla 1 kg ve 2 kg olan pürüzsüz *A* ve *B* diskleri, gösterilen hızlarla çarpışıyorlar. Diskler için geri dönme katsayısı e = 0.75 olduğuna göre, disklerin çarpışma sonrasındaki son hızlarının x ve y bileşenlerini belirleyiniz. Sürtünmeyi ihmal ediniz.

Örnek 15-11



$$(v_{Ax})_1 = 3\cos 30° = 2.598 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3\sin 30° = 1.50 \text{ m/s}$$

$$(v_{Bx})_1 = -1\cos 45° = -0.7071 \text{ m/s} \qquad (v_{By})_1 = -1\sin 45° = -0.7071 \text{ m/s}$$



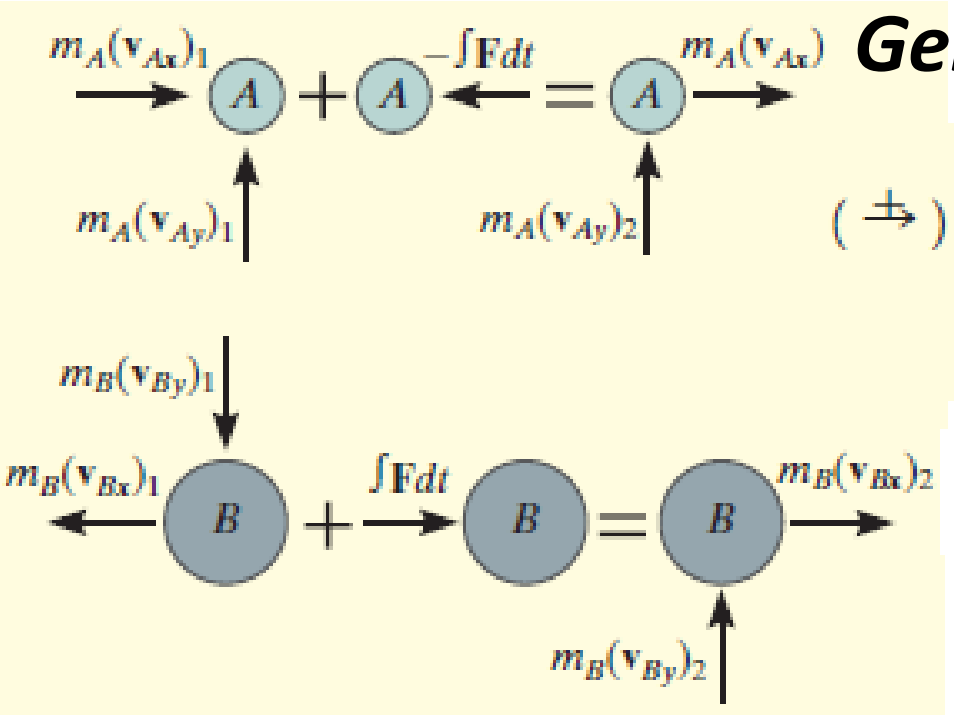
«x» Momentumun Korunumu.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$

$$1 \text{ kg}(2.598 \text{ m/s}) + 2 \text{ kg}(-0.707 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2 \text{ kg}(v_{Bx})_2$$

$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1.184 \qquad (1)$$

Örnek 15-11

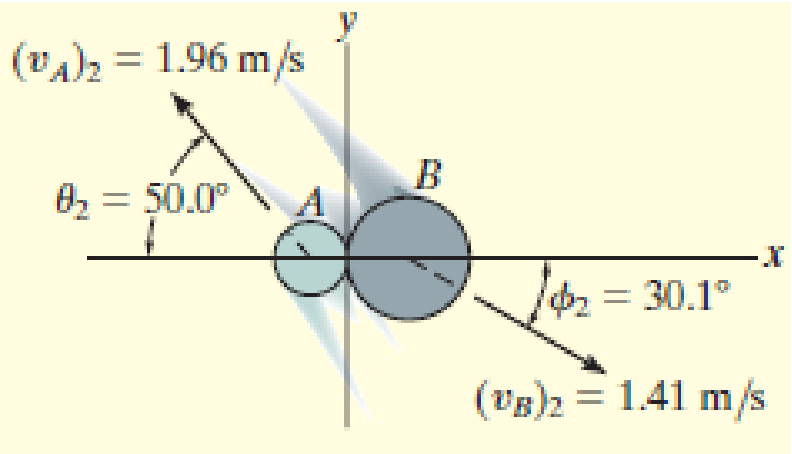


Geri Dönme Katsayısı.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}; \quad 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.598 \text{ m/s} - (-0.7071 \text{ m/s})}$$

$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2.479 \qquad (2)$$

$$(v_{Ax})_2 = -1.26 \text{ m/s} = 1.26 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1.22 \text{ m/s} \rightarrow$$



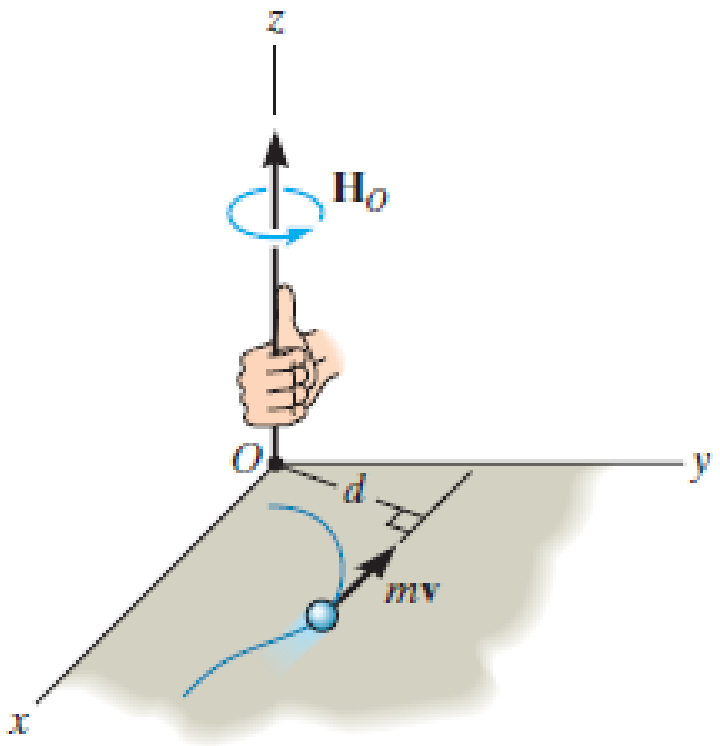
«y» Momentumun Korunumu.

$$(+\uparrow)\ m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2;\ (v_{Ay})_2 = 1.50 \text{ m/s} \uparrow$$

$$(+\uparrow)\ m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2;\ (v_{By})_2 = -0.707 \text{ m/s} = 0.707 \text{ m/s} \downarrow$$

15.5 Açısal Momentum

Bir parçacığın *O* noktasına göre *açısal momentumu*, parçacığın *O*'ya göre lineer momentumunun «momenti» olarak tanımlanır. $\mathbf{H}_O$ açısal momentumuna *momentumun momenti* de denir.



Skaler Formülasyon.

Bir parçacık *x-y* düzleminde hareket ediyorsa, *O* noktasına göre *açısal momentumu*, skaler formülasyona göre hesaplanabilir. $\mathbf{H}_O$'nun büyüklüğü:

$$\boxed{(H_O)_z = (d)(mv)} \qquad \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

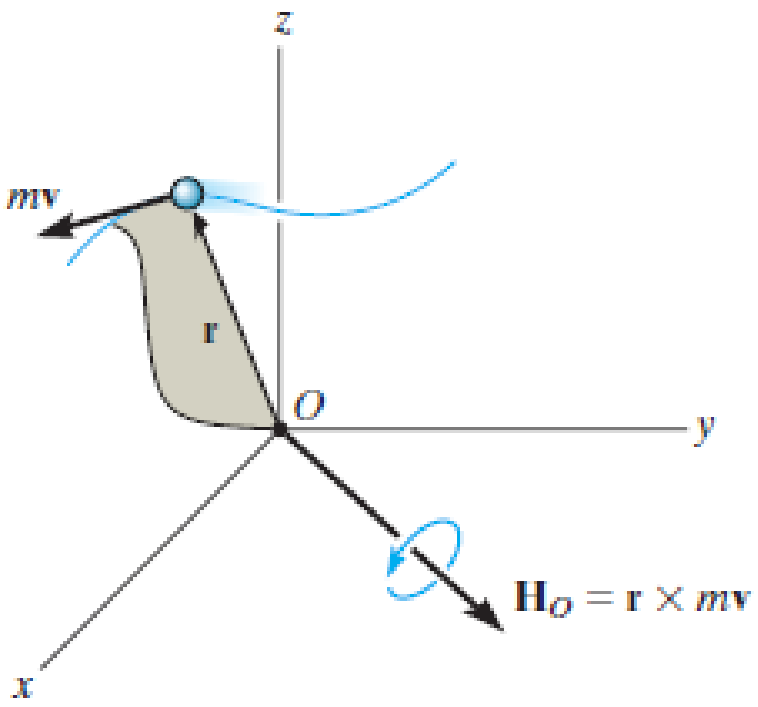
15.5 Açısal Momentum

Vektörel Formülasyon.

Parçacık bir uzay eğrisi boyunca hareket ediyorsa, *O* noktasına göre *açısal momentumu*, vektörel çarpım ile hesaplanabilir.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$



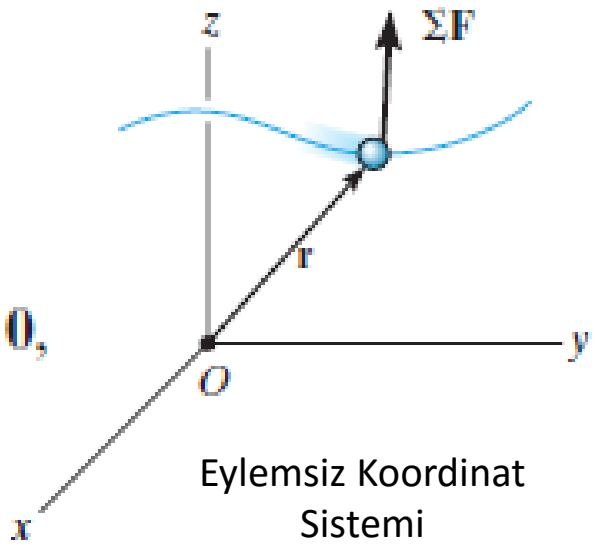
15.6 Bir Kuvvetin Momenti ve Açısal Momentum Arasındaki İlişki

Hareket denklemi kullanılarak, parçacık üzerine etkiyen bütün kuvvetlerin *O*'ya göre momentlerinin parçacığın açısal momentumu ile ilişkisi kurulabilir.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \qquad \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0},$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$$



Eylemsiz Koordinat Sistemi

15.6 Bir Kuvvetin Momenti ve Açısal Momentum Arasındaki İlişki

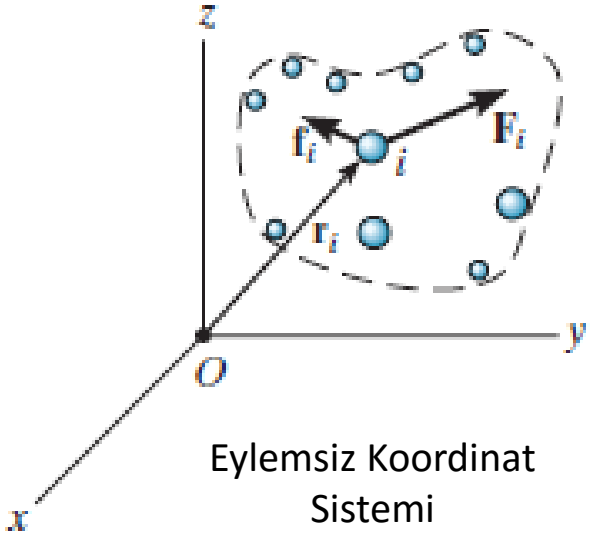
Parçacık Sistemi.

Hareket denklemi kullanılarak, parçacık sistemi üzerine etkiyen bütün kuvvetlerin *O*'ya göre momentlerinin parçacığın açısal momentumu ile ilişkisi de kurulabilir.

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

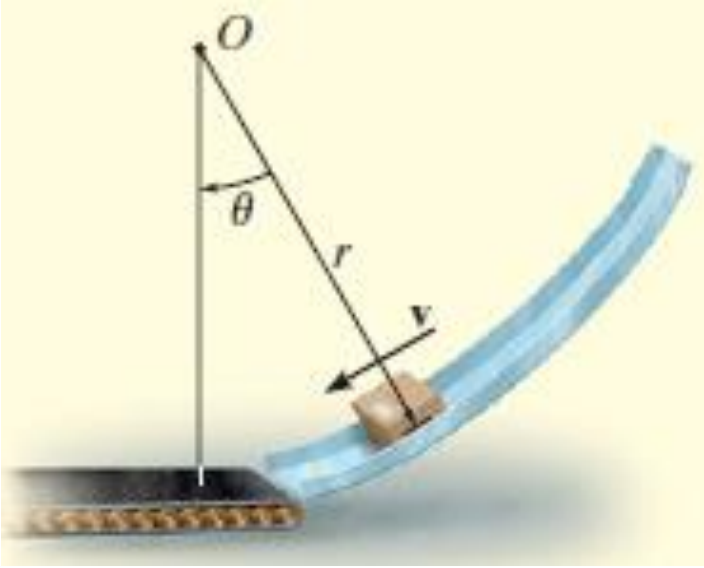
$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$



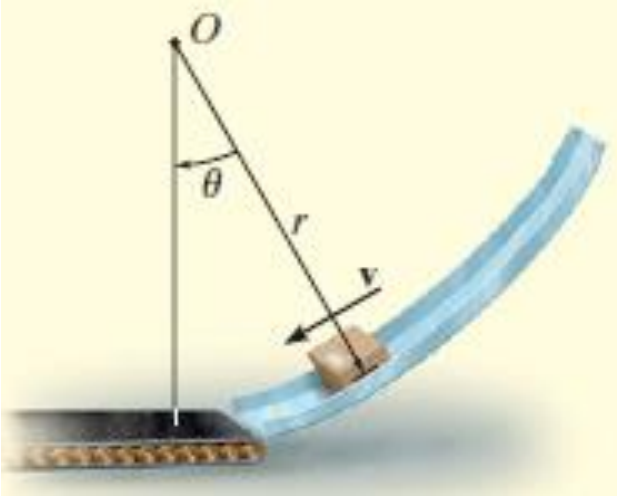
Eylemsiz Koordinat Sistemi

Örnek 15-12



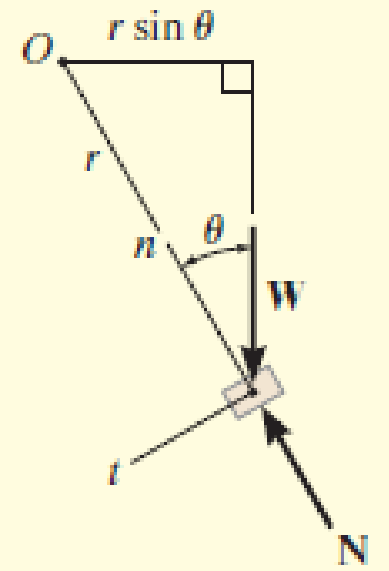
m kütleli kutu, θ açısı ile belirli konumdayken, *v* hızına sahip olacak şekilde, pürüzsüz dairesel rampadan aşağı doğru ilerlemektedir. Kutunun bu andaki *O*'ya göre açısal momentumunu ve hızındaki artım oranını belirleyiniz.

Örnek 15-12



$$H_O = rmv \circlearrowright$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r\sin\theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$



$$mgr\sin\theta = rm\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

15.7 Açısal İmpuls ve Momentum İlkeleri

Açısal İmpuls ve Momentum İlkesi.

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O \, dt = d\mathbf{H}_O$$

$$t = t_1, \mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$$
$$t = t_2, \mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Bu denklem, *açısal impuls ve momentum ilkesi* olarak adlandırılır.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{F}}$$

$$\boxed{\text{açısal impuls} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \, dt}$$

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2$$

15.7 Açısal İmpuls ve Momentum İlkeleri

Vektörel Formülasyon.

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Skaler Formülasyon.

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

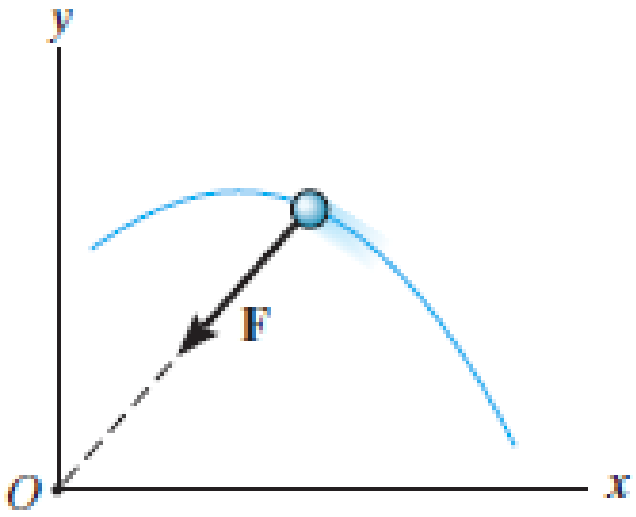
$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_y)_2$$

$$(H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt = (H_O)_2$$

15.7 Açısal Momentumun Korunumu.

t_1'den t_2'ye kadar geçen sürede parçacık üzerine etki eden açısal impulslar sıfır olduğunda: $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$ $\qquad \Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2$

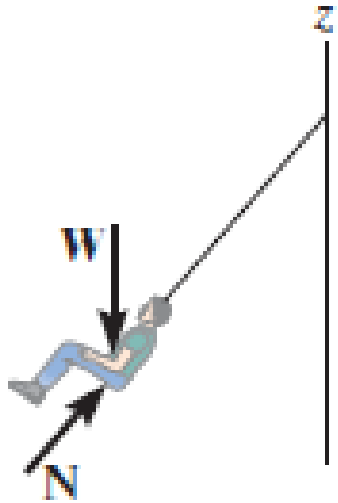
Bu denklem, ***açısal momentumun korunumu*** olarak bilinir.



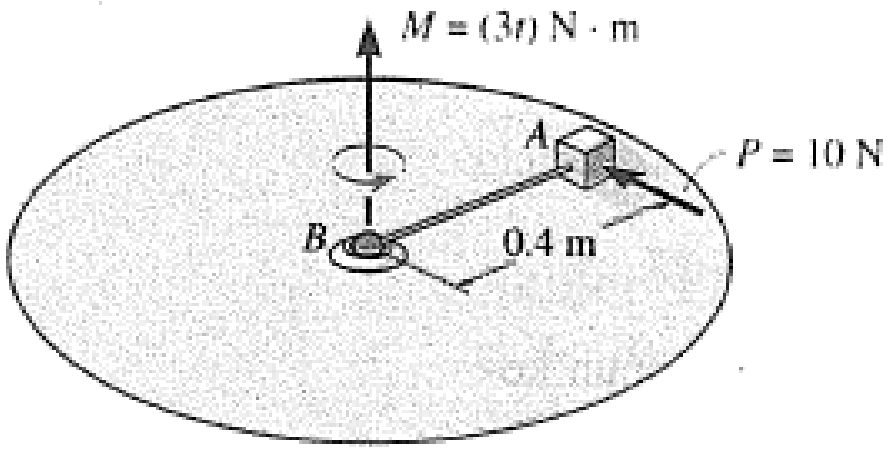
Bazı durumlarda, *parçacığın açısal momentumu korunur, lineer momentumu korunmayabilir*. Örneğin, *parçacık sadece merkezsel bir kuvvete maruz kaldığında* böyle bir durum oluşur. **F** impulsif merkezsel kuvveti daima *O*'ya doğru yönlenir ve *O*'dan geçen *z* eksenine göre açısal impulsu sıfırdır. Parçacığın açısal momentumu korunur.

15.7 Açısal Momentumun Korunumu.

Hava direnci ihmal edilirse, dönme eksenine göre açısal momentum korunur.



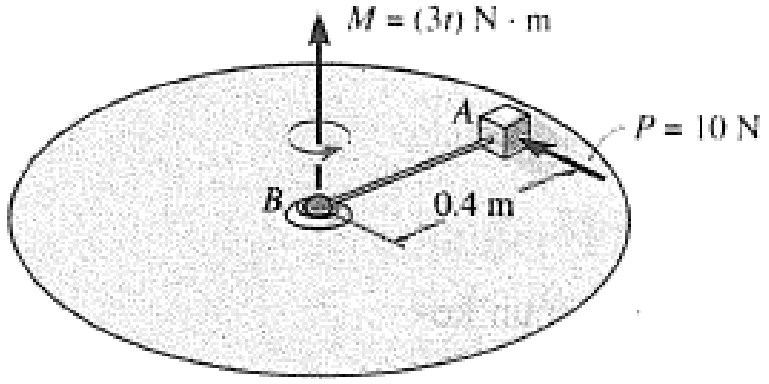
Örnek 15-13

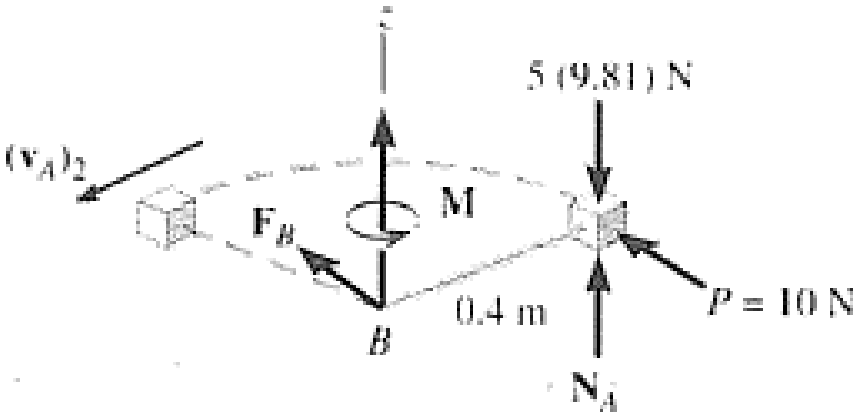


Boyutları ihmal edilebilen 5 kg'lık bir blok, pürüzsüz yatay düzlemde durmaktadır. Çubuğa, $M = (3t)$ Nm momenti, bloğa yatay bir $P = 10$ N kuvveti uygulandığına göre, bloğun durağan halden harekete başlayarak 4 s'de ulaşacağı hızı belirleyiniz.

Örnek 15-13

Açısal İmpuls ve Momentum İlkesi.





$$(H_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_z \, dt = (H_z)_2$$

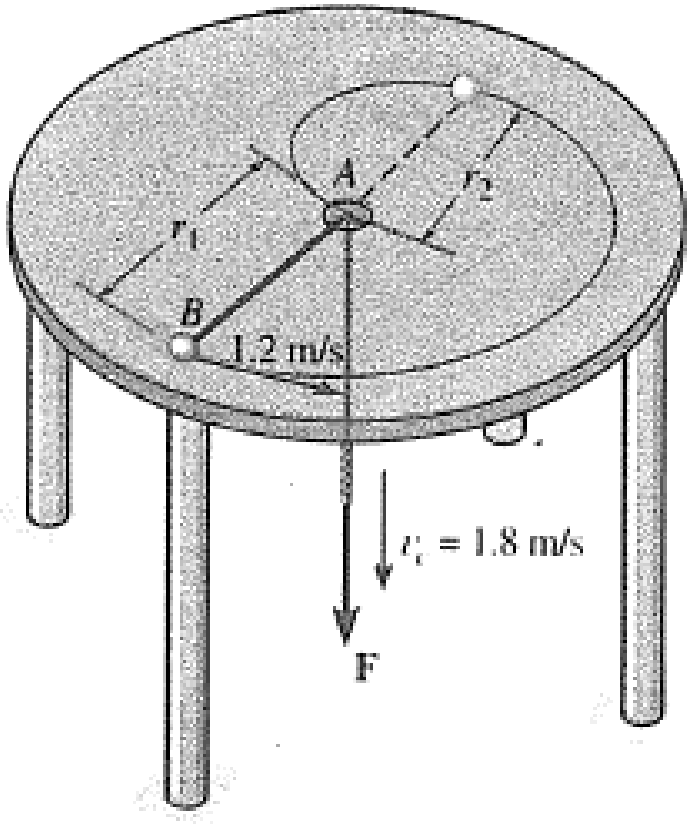
$$(H_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} M \, dt + r_{BA} P(\Delta t) = (H_z)_2$$

$$0 + \int_0^4 3t \, dt + (0.4 \text{ m})(10 \text{ N})(4 \text{ s}) = 5 \text{ kg } (v_A)_2 (0.4 \text{ m})$$

$$24 + 16 = 2(v_A)_2$$

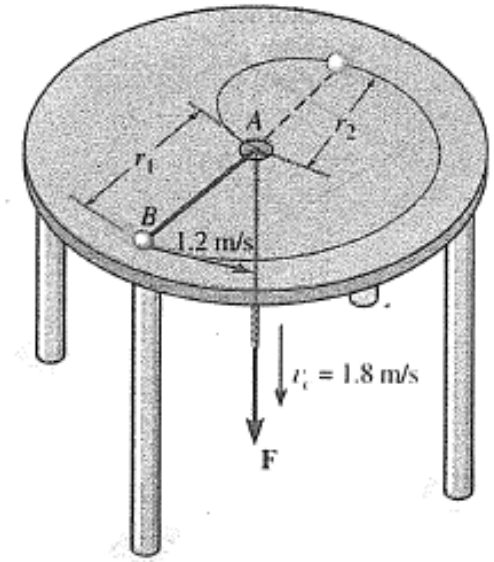
$$(v_A)_2 = 20 \text{ m/s}$$

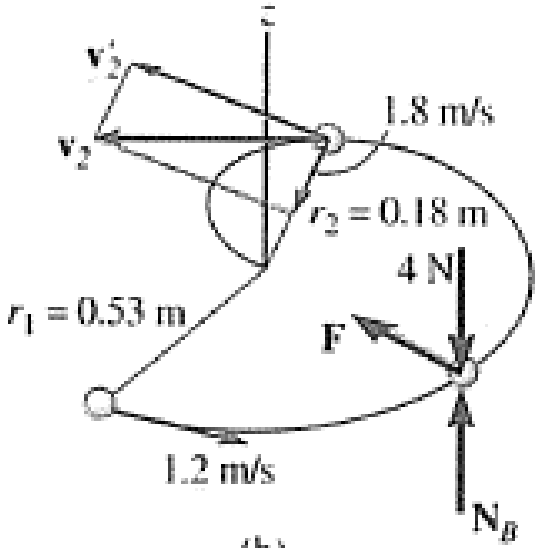
Örnek 15-14



4N ağırlığındaki *B* topu, pürüzsüz bir masa üzerinde, *A*'daki bir delikten geçen bir ipe bağlanmıştır. Top, delikten r_1=0.53 m uzaktayken, hızı v_1=1.2 m/s olacak şekilde dairesel bir yörüngede bulunmaktadır. İp, bir **F** kuvveti uygulanarak v_c=1.8 m/s sabit hızıyla aşağı doğru çekildiğine göre, *(a)* topun delikten r_2=0.18 m uzaktaki hızını, *(b) r* radyal uzaklığının kısalması süresince **F** kuvveti tarafından yapılan iş miktarını belirleyiniz.

Örnek 15-14





Açısal Momentumun Korunumu.

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$0.53 \text{ m}\left(\frac{4 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)1.2 = 0.18 \text{ m}\left(\frac{4 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)v_2'$$

$$v_2' = 3.53 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{(3.53)^2 + (1.8)^2}$$

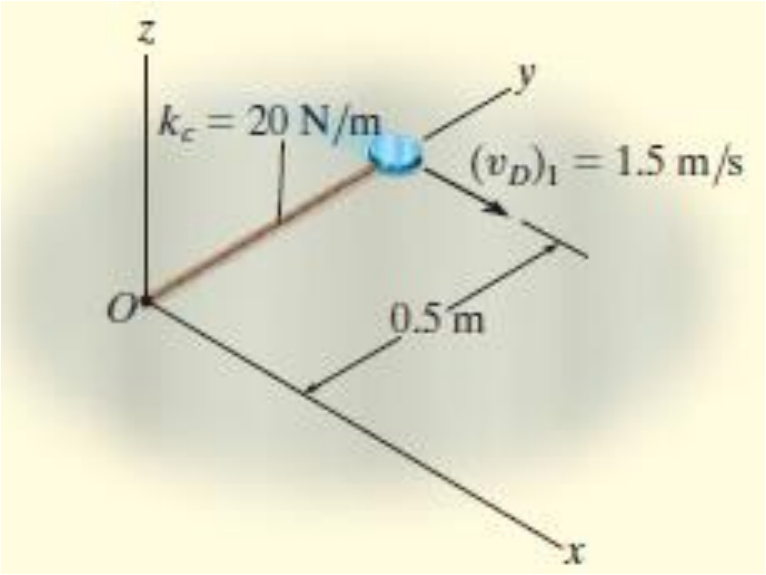
$$= 3.396 \text{ m/s}$$

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)(1.2 \text{ m/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{4 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)(3.96 \text{ m/s})^2$$

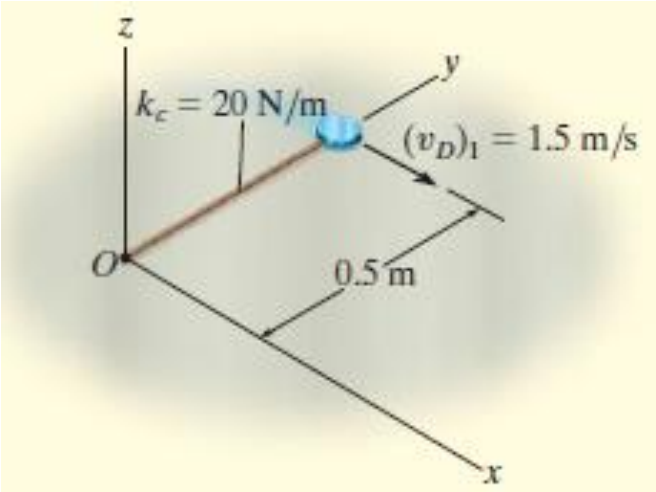
$$U_F = 2.90 \text{ J}$$

Örnek 15-15



Pürüzsüz bir yatay yüzeyde duran 2 kg'lık disk, başlangıçta uzamamış olan elastik bir kordona bağlanmıştır. Diske, kordona dik 1.5 m/s hızı verildiğine göre, kordonun uzama hızını ve kordonun 0.2 m uzadığı anda diskin hızının büyüklüğünü belirleyiniz.

Örnek 15-15



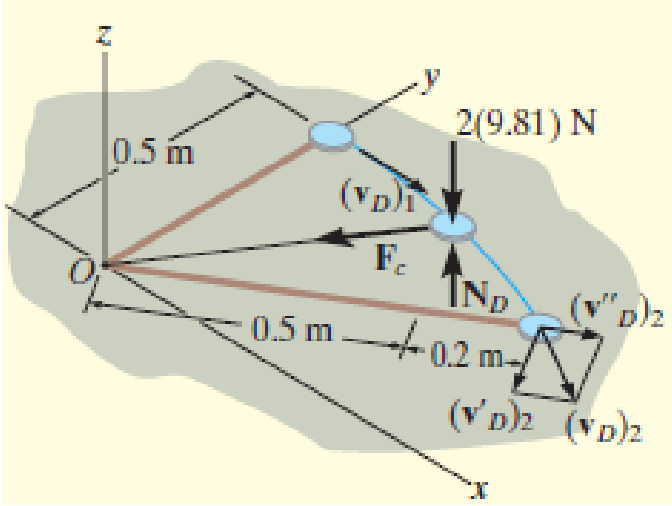
Açısal Momentumun Korunumu.

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$

$$0.5 \text{ m } (2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) = 0.7 \text{ m}(2 \text{ kg})(v'_D)_2$$

$$(v'_D)_2 = 1.071 \text{ m/s}$$



Enerjinin Korunumu.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2} m_D (v_D)_1^2 + \tfrac{1}{2} k x_1^2 = \tfrac{1}{2} m_D (v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2} k x_2^2$$

$$\tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})^2$$

$$(v_D)_2 = 1.360 \text{ m/s} = 1.36 \text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$

$$= \sqrt{(1.360 \text{ m/s})^2 - (1.071 \text{ m/s})^2}$$

$$= 0.838 \text{ m/s}$$