Mühendislik Mekaniği
Dinamik

Yrd.Doç.Dr. Akın Ataş

Bölüm 12

Parçacık Kinematiği

Kaynak: ‘Mühendislik Mekaniği: Dinamik’, R.C.Hibbeler, S.C.Fan, Çevirenler: A. Soyuçok, Ö. Soyuçok.

12 Parçacık Kinematiği

Bu bölümde, bir parçacığın sabit ve hareketli referans sistemlerine göre ölçülen hareketinin geometrik yönlerini inceleyeceğiz.

Yörünge, değişik koordinat sistemi tiplerine göre tanımlanacak ve hareketin koordinat eksenleri üzerindeki bileşenleri belirlenecektir.

Basit olması için, bir eğri boyunca olan genel hareketten önce, doğrusal hareket incelenecektir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Mühendislik mekaniğinin ilk kısmı, duran veya sabit hızla hareket eden cisimlerin denge durumunu ele alan ***statik***'e ayrılmıştı. İkinci kısım ise, ivmeli hareket eden cisimleri ele alan ***dinamik***'e ayrılmıştır.

Bu kitapta dinamik konusu da ikiye ayrılmıştır: hareketin sadece geometrik yönlerini inceleyen ***kinematik*** ve harekete neden olan kuvvetlerin analizi olan ***kinetik***.

Öncelikle parçacık dinamiği incelenecek, daha sonra iki ve üç boyutlu rijit cisim dinamiği konuları gelecektir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Parçacık kinematiği ile başlıyoruz. Bir *parçacığın* bir kütlesi vardır fakat büyüklüğü ve şekli ihmal edilebilir.

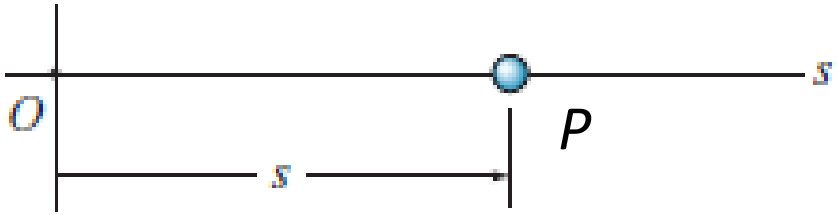
Çoğu problemde, füzeler, mermiler veya arabalar gibi sonlu büyüklükteki cisimlerle ilgilenilmektedir.

Cismin hareketi kütle merkezinin hareketi ile ifade edilebiliyor ve herhangi bir dönme hareketi ihmal edilebiliyorsa, bu cisimler parçacık olarak nitelenebilir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Doğrusal Kinematik. Bir parçacık doğrusal ya da eğrisel bir yörünge üzerinde hareket edebilir. Öncelikle doğrusal hareketi inceleyeceğiz. Bu hareketin kinematiği, parçacığın verilen herhangi bir andaki konum, hız ve ivmesinin belirlenmesi olarak tanımlanır.

Konum. Parçacığın doğrusal yörüngesi tek bir *s* koordinat ekseni ile tanımlanabilir.

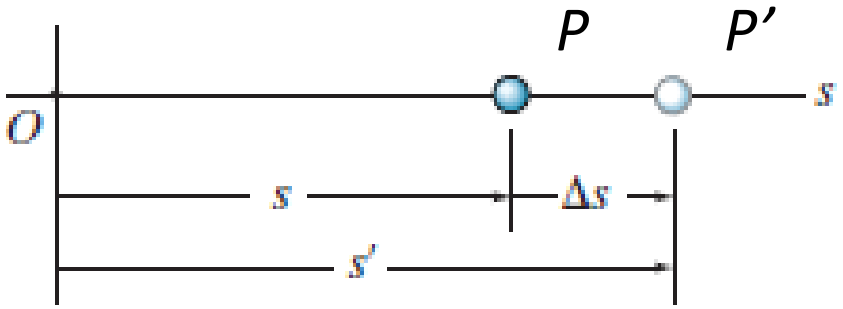


Konum

Büyüklüğü *O*'dan *P*'ye olan uzaklıktır, genellikle metre ile ölçülür. Seçim keyfi olmakla birlikte, şekildeki durumda *s* pozitiftir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Yer Değiştirme. Parçacığın *yer değiştirmesi konumundaki değişme* olarak tanımlanır.



Yer Değiştirme

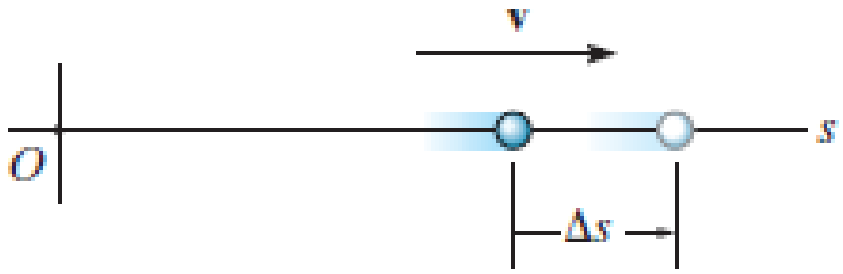
$$\Delta s = s' - s$$

Bir parçacığın yer değiştirmesi vektörel bir *büyüklük* olduğundan, katedilen mesafeden farklıdır.

Katedilen mesafe bir *pozitif skaler*dir ve parçacığın aldığı yolun toplam uzunluğunu gösterir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Hız. Parçacığın *Δt* zaman aralığındaki ortalama hızı:



Hız

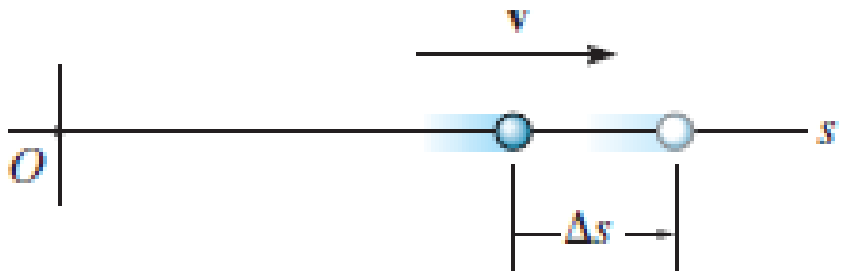
$$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t), \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Anlık hız

Δt ve *dt* daima pozitif olduğundan, hızın yönünü belirten işaret *Δs* ile aynıdır. Örneğin, parçacık *sağa* doğru hareket ediyorsa, hızı *pozitif*tir. Hızın büyüklüğü genellikle m/s ile ifade edilir.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

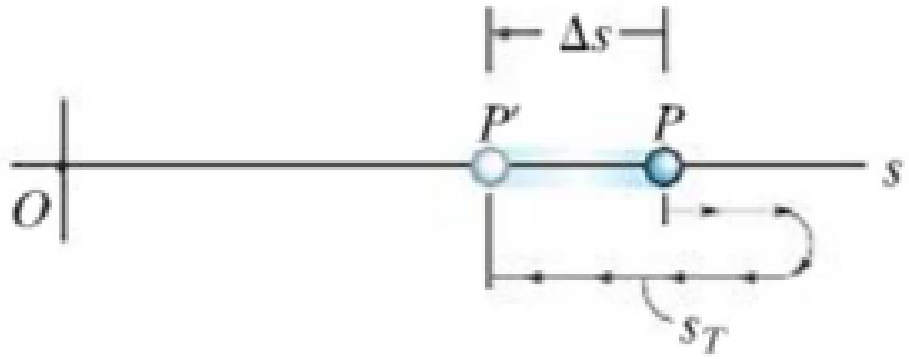
Hız. Parçacığın *Δt* zaman aralığındaki ortalama hızı:



Hız

$$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t), \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Anlık hız



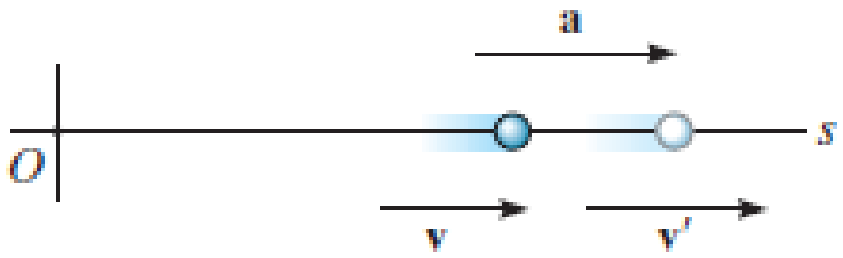
Ortalama sürat daima pozitif bir skalerdir ve parçacığın aldığı s_T toplam yolunun geçen *Δt* zamanına oranıdır:

$$v_m = \frac{s_T}{\Delta t}$$

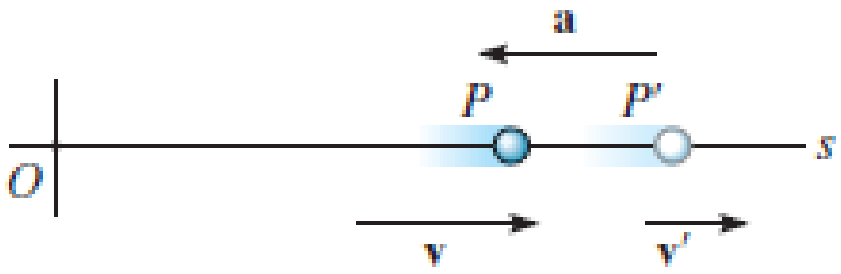
12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

İvme. Parçacığın P ve P’ gibi iki noktadaki hızı bilindiğinde, *Δt* zaman aralığında:

$$\Delta v = v' - v, \quad a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta v / \Delta t), \quad \boxed{a = \frac{dv}{dt}} \quad \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \boxed{a\,ds = v\,dv}$$



Hızlanma



Yavaşlama

Hem ortalama hem de anlık ivme pozitif ya da negatif olabilir. Hız sabit olduğunda ivme sıfırdır. İvme birimi olarak çoğunlukla m/s^2 kullanılır.

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Sabit ivme, $a = a_c$. İvme sabit olduğunda $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ ve $a_c ds = vdv$ kinematik denklemleri integre edilebilir. Böylece a_c, v, s ve t'yi bağlayan formüller elde edilir.

Zamanın Fonksiyonu Olarak Hız. Başlangıçta $t = 0$ iken $v = v_0$ olduğunu varsayarak $a_c = dv/dt$'yi integte edelim:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a_c \, dt$$

$$v = v_0 + a_c t$$

Sabit İvme

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Zamanın Fonksiyonu Olarak Konum. Başlangıçta $t = 0$ iken $s = s_0$ olduğunu varsayarak $v = ds/dt = v_0 + a_c t$'yi integte edelim:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

Sabit İvme

12.1 Doğrusal Kinematik: Sürekli Hareket

Konumun Fonksiyonu Olarak Hız. $s = s_0$ ve $v = v_0$ olduğunu varsayarak $v\,dv = a_c\,ds$ 'yi integte edelim:

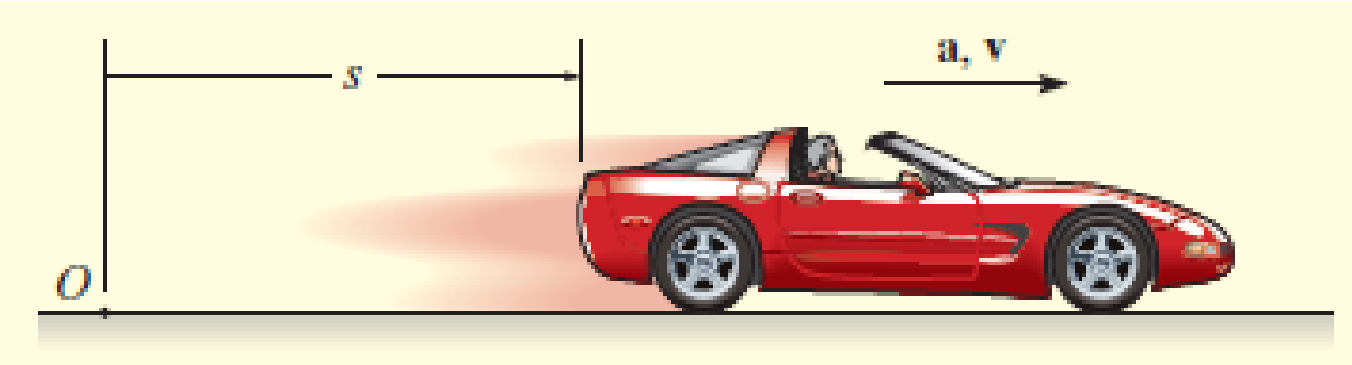
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_c\,ds$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)}$$

Sabit İvme

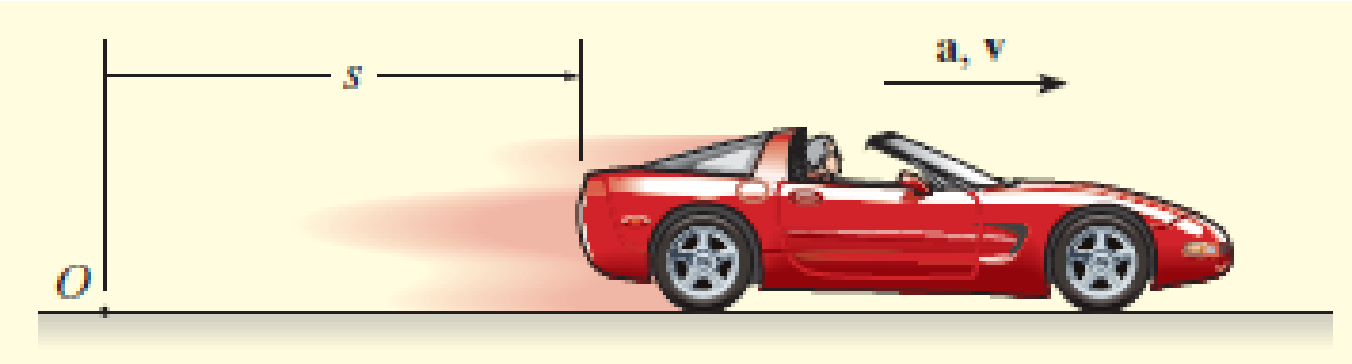
Verilen denklemler *sadece ivme sabit olduğunda* ve $t = 0$ iken $s = s_0$, $v = v_0$ olduğunda geçerlidir.

Örnek 12-1



Şekildeki araba hızı $v = 0.3(9t^2 + 2t)$ m/s olacak şekilde bir doğru üzerinde kısa bir süre hareket ediyor. t'nin birimi saniyedir. $t = 3$ s iken konumunu ve ivmesini belirleyiniz. $t = 0$'da $s = 0$'dır.

Örnek 12-1



Konum.

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.3(9t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t 0.3(9t^2 + 2t)\, dt$$

$$s \Big|_0^s = 0.3(3t^3 + t^2) \Big|_0^t$$

$$s = 0.9t^3 + 0.3t^2$$

$t = 3$ s olduğunda

$$s = 0.9(3)^3 + 0.3(3)^2 = 27 \text{ m}$$

İvme.

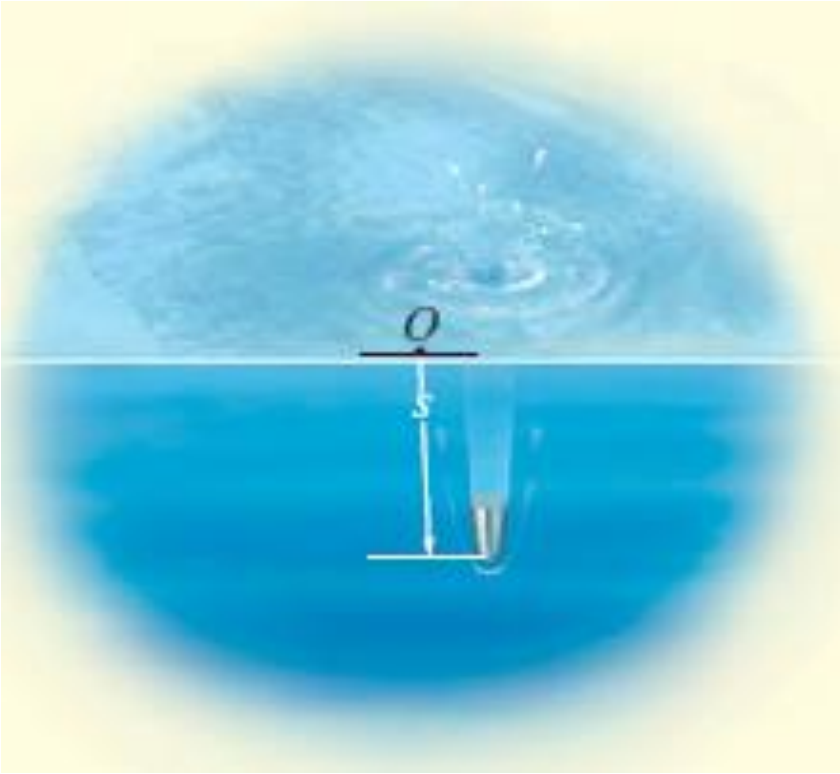
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} 0.3\,(9t^2 + 2t)$$

$$= 5.4t + 0.6$$

$t = 3$ s olduğunda

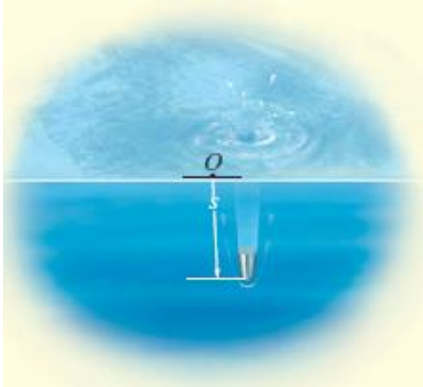
$$a = 5.4(3) + 0.6 = 16.8 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

Örnek 12-2



Bir mermi *aşağıya doğru* dikey olarak 60 m/s'lik başlangıç hızıyla bir akışkan ortamın içine ateşleniyor. Mermi, $a = (-0.4v^3)$ olacak şekilde yavaşlamakta ise, merminin ateşlendikten 4 s sonraki hızını ve konumunu belirleyiniz. Burada v m/s ile ölçülmektedir.

Örnek 12-2



Hız.

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\ \mathrm{m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\}\ \mathrm{m/s}$$

$t = 4\ \mathrm{s},$

$v = 0.559\ \mathrm{m/s}\downarrow$

Konum.

$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

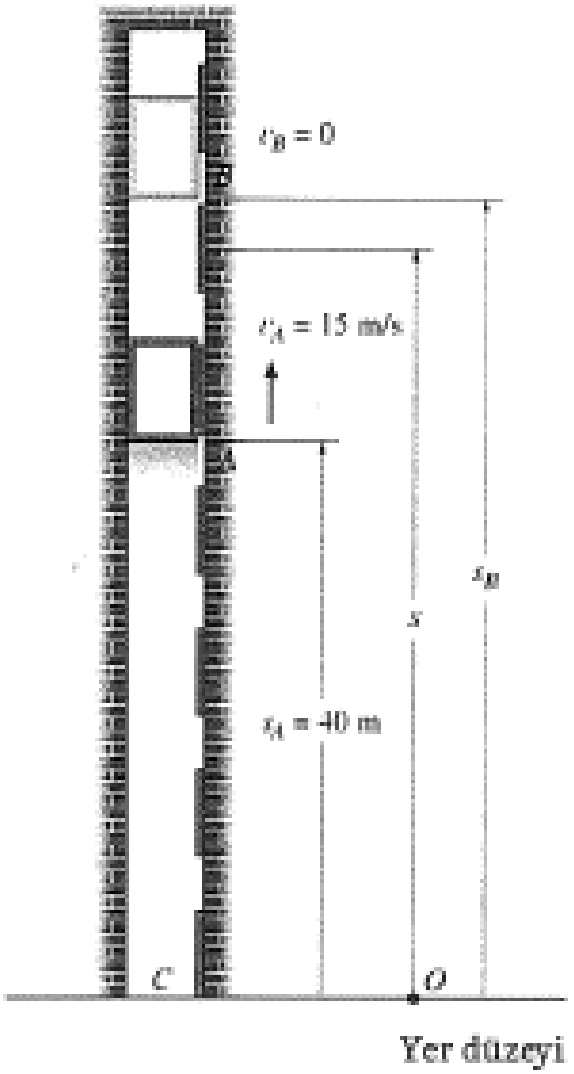
$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\}\ \mathrm{m}$$

$t = 4\ \mathrm{s},$

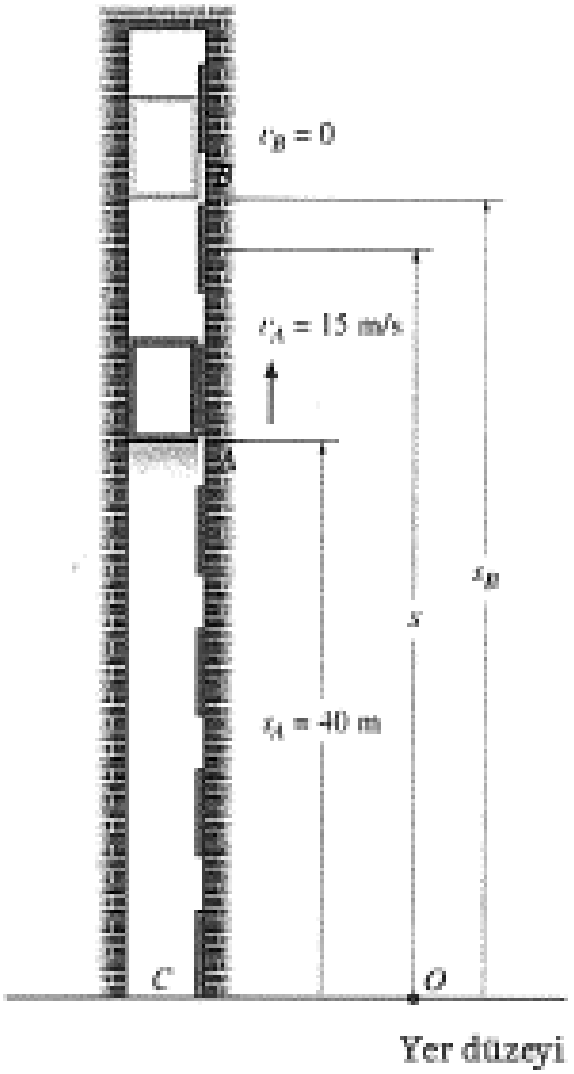
$s = 4.43\ \mathrm{m}$

Örnek 12-3



Bir asansör 15 m/s ile yukarı doğru çıkmaktadır ve taşıyıcı kablo asansör yerden 40 m yüksekte iken kesilmektedir. Asansörün ulaştığı s_B maksimum yüksekliğini ve yere çarpmadan hemen önceki hızını belirleyiniz. Bütün bu süre boyunca asansör hareket halindedir; yerçekiminden dolayı aşağıya doğru 9.81 m/s^2'lik bir ivmeye maruz kalmaktadır. Hava direncini ihmal ediniz.

Örnek 12-3



Maksimum Yükseklik.

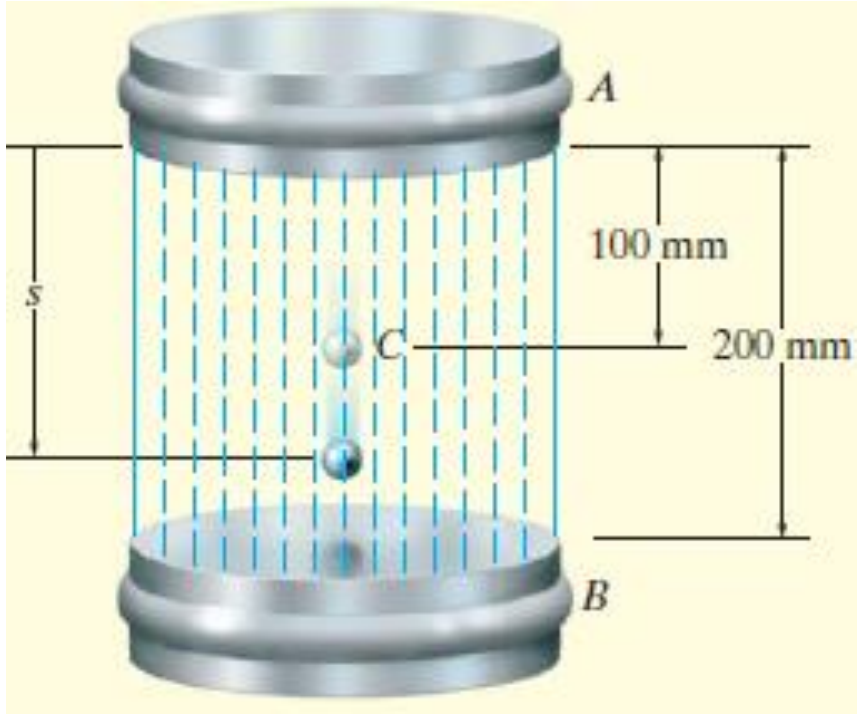
$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$0 = (15\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(s_B - 40\ \text{m})$$
$$s_B = 51.5$$

Hız.

$$v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$= 0 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 51.5\ \text{m})$$
$$v_C = -31.8\ \text{m/s} = 31.8\ \text{m/s} \downarrow$$

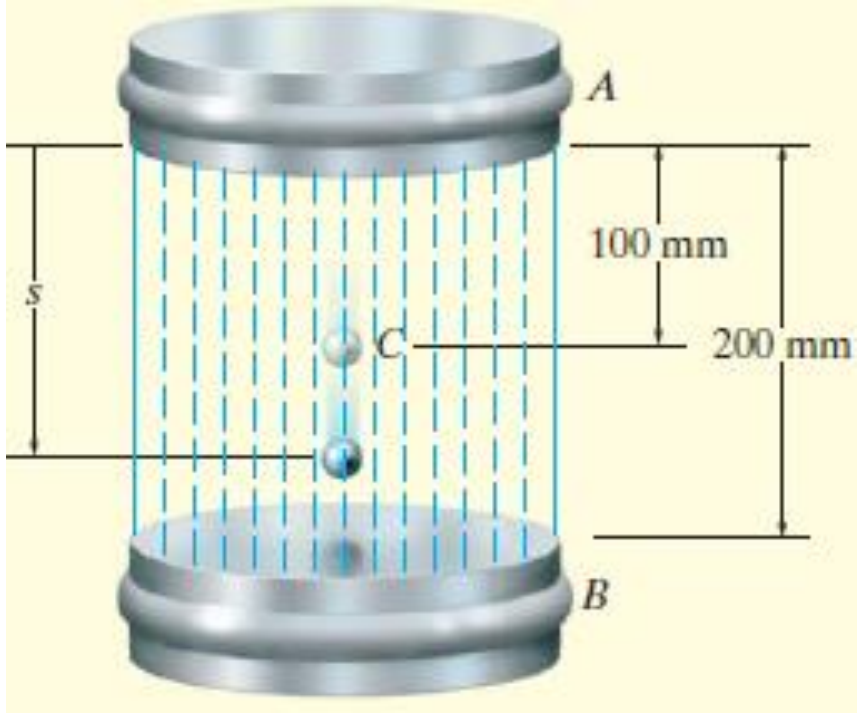
$$v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$
$$= (15\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 40\ \text{m})$$
$$v_C = -31.8\ \text{m/s} = 31.8\ \text{m/s} \downarrow$$

Örnek 12-4



Metal bir parçacık, bir manyetik alanın etkisinde *A* plağından *B* plağına uzanan bir akışkanın içinde aşağı doğru yol almaktadır. Parçacık s = 100 mm olan *C* orta noktasından ilk hızsız bırakılırsa ve ivmesi *s*'nin birimi metre olmak üzere $a = (4s)$ m/s^2 olarak ölçülüyorsa, parçacığın s = 200 mm mesafedeki *B* plağına ulaştığındaki hızını ve *C*'den *B*'ye ulaşması için gerekli olan zamanı belirleyiniz.

Örnek 12-4



Hız.

$$v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1\text{ m}}^s 4s\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1\text{ m}}^s$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\text{ m/s}$$

Zaman.

$$ds = v\,dt$$
$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}dt$$

$$\int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^s = 2t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.303 = 2t$$

$s = 0.2$ m,

$$t = \frac{\ln\left(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2\right) + 2.303}{2} = 0.658\text{ s}$$

$s = 200$ mm $= 0.2$ m,

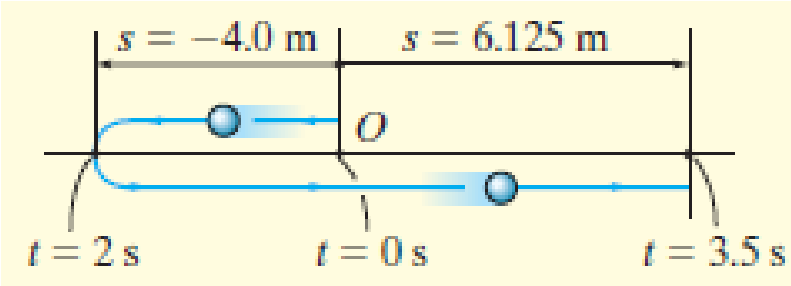
$$v_B = 0.346\text{ m/s} = 346\text{ mm/s} \downarrow$$

Örnek 12-5

Bir parçacık hızı $v = (3t^2 - 6t)$ m/s olacak şekilde yatay bir yörünge üzerinde hareket etmektedir. Burada t saniye olarak zamandır. Başlangıçta O merkezinde ise, $t = 0 - t = 3.5$ s zaman aralığında parçacığın aldığı yolu, ortalama hız vektörünü ve ortalama hızı bulunuz.

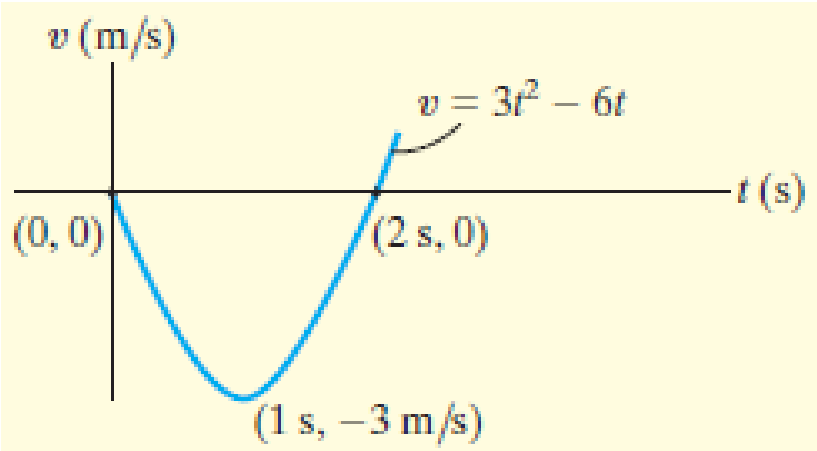
Örnek 12-5

Alınan Yol.



$$ds = v\,dt$$
$$= (3t^2 - 6t)dt$$
$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 - 6t)\,dt$$
$$s = (t^3 - 3t^2)\text{m}$$

$$s|_{t=0} = 0 \qquad s|_{t=2\,\text{s}} = -4.0\ \text{m} \qquad s|_{t=3.5\,\text{s}} = 6.125\ \text{m}$$
$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125\ \text{m} = 14.1\ \text{m}$$



Hız.

$$\Delta s = s|_{t=3.5\,\text{s}} - s|_{t=0} = 6.125\ \text{m} - 0 = 6.125\ \text{m}$$
$$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 1.75\ \text{m/s} \rightarrow$$
$$(v_{sp})_{avg} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 4.04\ \text{m/s}$$

12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

Bir parçacığın hareketi düzensiz ise konum, hız ya da ivmesini tanımlayacak sürekli bir matematiksel fonksiyon elde etmek zor olabilir.

Hareket, bir dizi eğri ile grafiksel olarak tanımlanabilir.

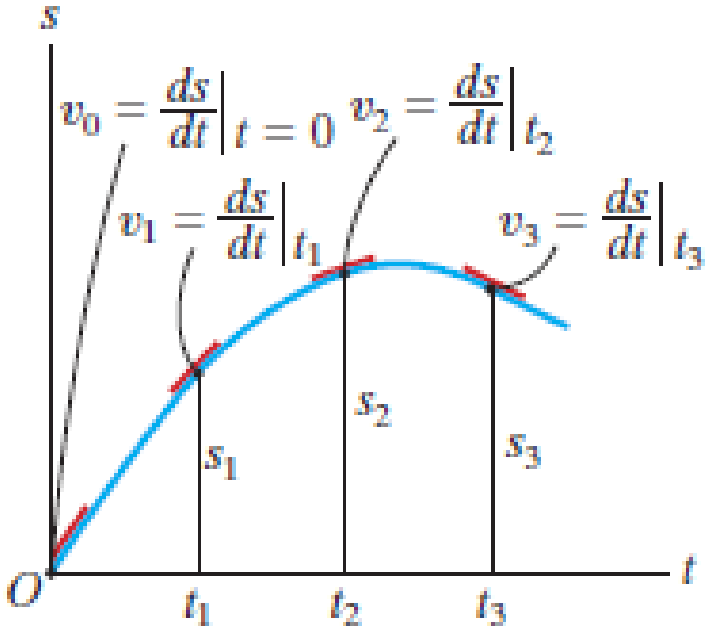
Elde edilen grafik a, v, s, t değişkenlerinden herhangi ikisi arasındaki bağıntıyı tanımlıyorsa, diğer değişkenler arasındaki bağıntıyı tanımlayan bir grafik $a = dv/dt$, $v = ds/dt$, $a\ ds = v\ dv$ kinematik denklemleri ile oluşturulabilir.

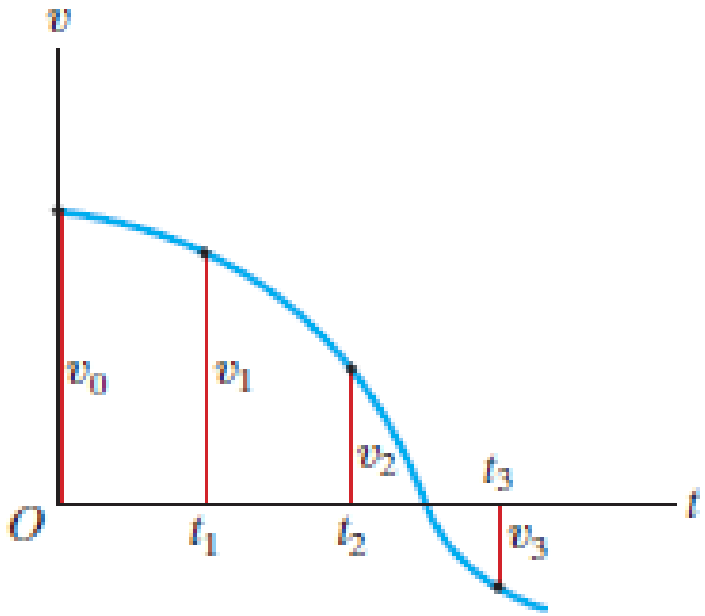
12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

$s - t$ Grafiği verildiğinde $v - t$ Grafiğini Oluşturmak.

Bir parçacığın t zaman aralığındaki konumu, deneysel olarak belirlenebiliyorsa, parçacığın $s - t$ grafiği çizilebilir.

Parçacığın hızını zamanın fonksiyonu olarak belirlemek için, $v - s$ ve t'yi bağlayan $v = ds/dt$'yi kullanmalıyız.





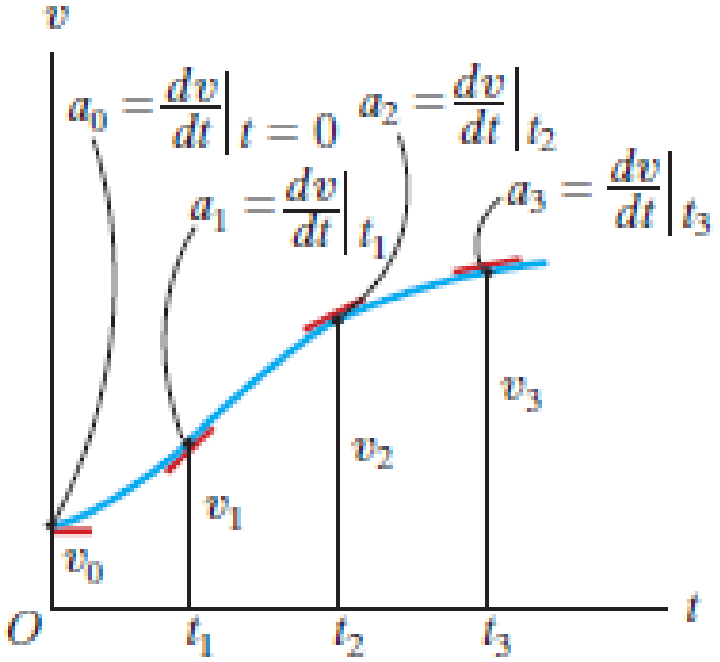
$$\frac{ds}{dt} = v$$

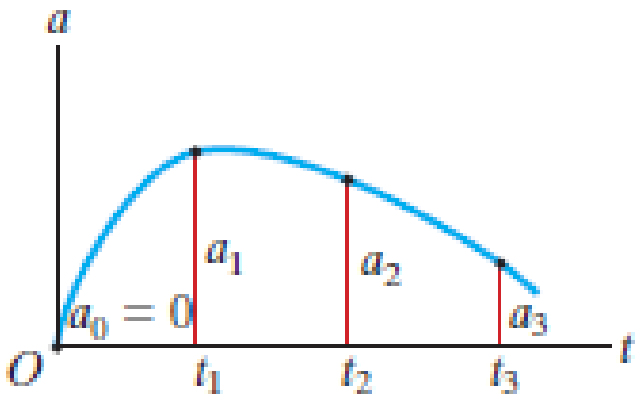
$s - t$ eğimi = *hız*

12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

v – t Grafiği verildiğinde *a – t* Grafiğini Oluşturmak.

Bir parçacığın *v – t* grafiği biliniyorsa, *a – t* grafiği, *a = dv/dt* kullanılarak belirlenebilir.

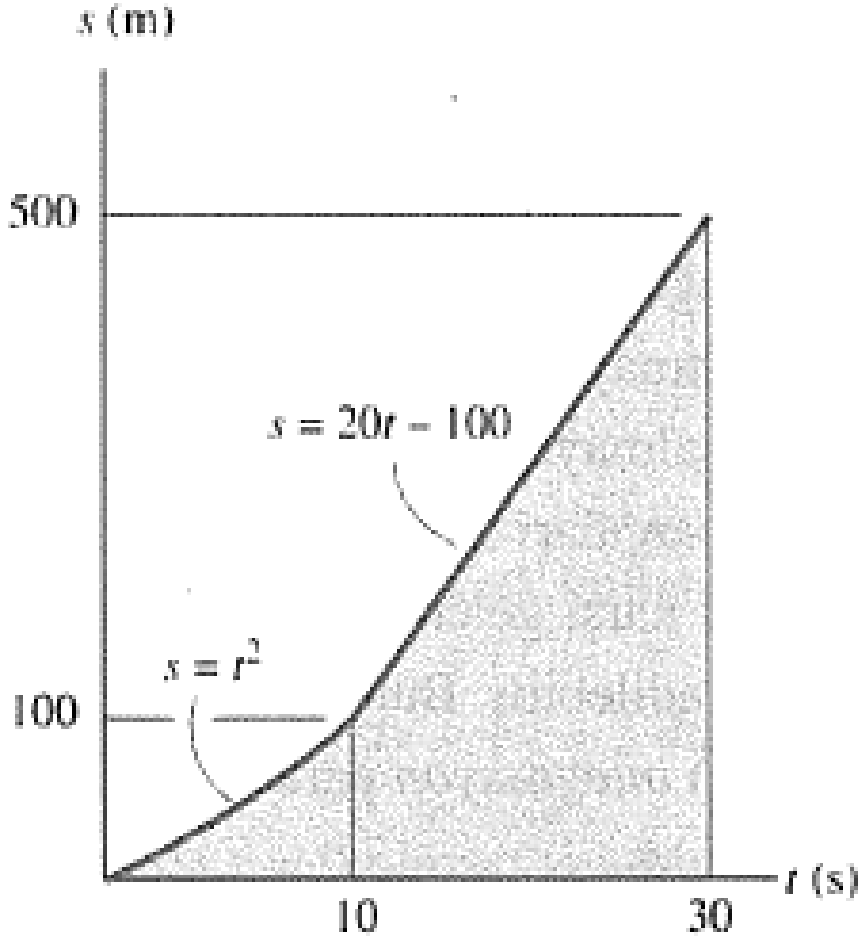




$$\frac{dv}{dt} = a$$

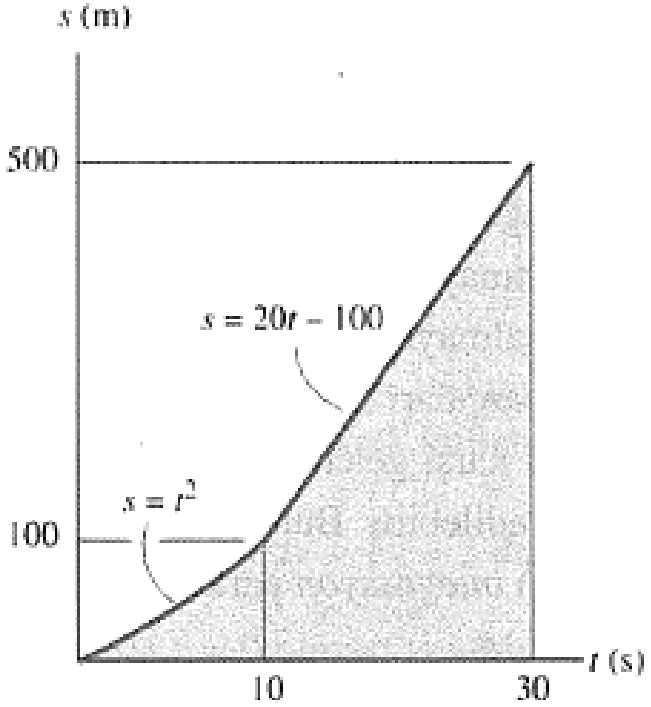
$v - t$ eğimi	=	*ivme*

Örnek 12-6



Bir otomobil düz bir yol boyunca ilerlemektedir ve deneysel olarak konumu şekildeki gibi belirlenmiştir. $0 \leq t \leq 30$ s zaman aralığı için $v - t$ ve $a - t$ grafiklerini oluşturunuz.

Örnek 12-6

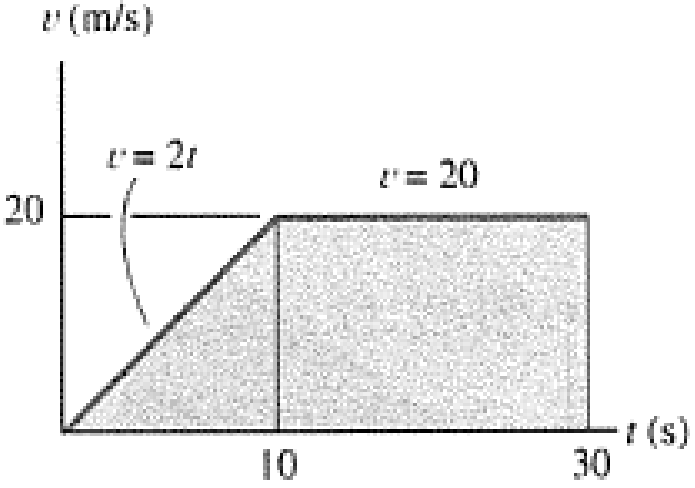


v – t Grafiği.

$$0 \le t < 10 \text{ s}; \qquad s = t^2 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 2t$$

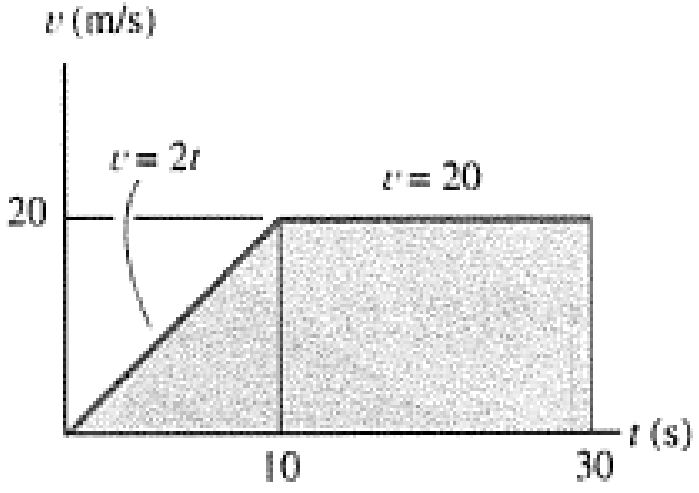
$$10 \text{ s} < t \le 30 \text{ s}; \qquad s = 20t - 100 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20$$

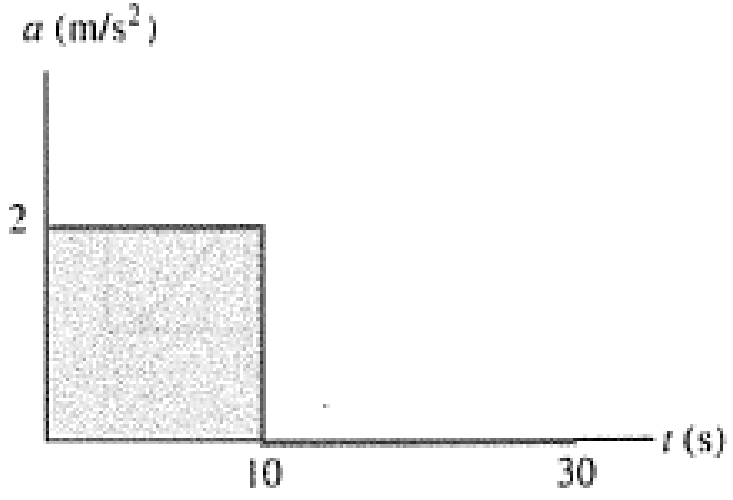
Verilen bir anda s – t grafiğinin eğimini ölçerek v'nin belli değerlerini de elde edebiliriz.



$$t = 20 \text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 - 100}{30 - 10} = 20 \text{ m/s}$$

Örnek 12-6





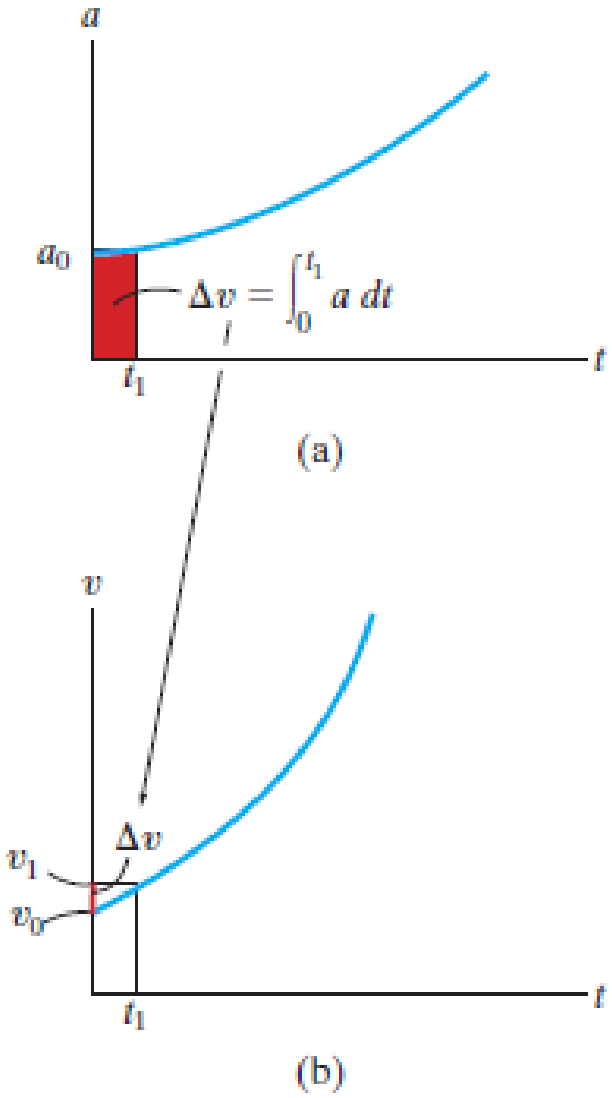
a – t Grafiği.

$0 \le t < 10$ s; $\quad v = 2t \quad a = \dfrac{dv}{dt} = 2$

$10 < t \le 30$ s; $\quad v = 20 \quad a = \dfrac{dv}{dt} = 0$

12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

a – t Grafiği verildiğinde *v – t* Grafiğini Oluşturmak.



Bir zaman aralığında parçacığın hızındaki değişme aynı zaman aralığında *a – t* grafiği altındaki alana eşittir.

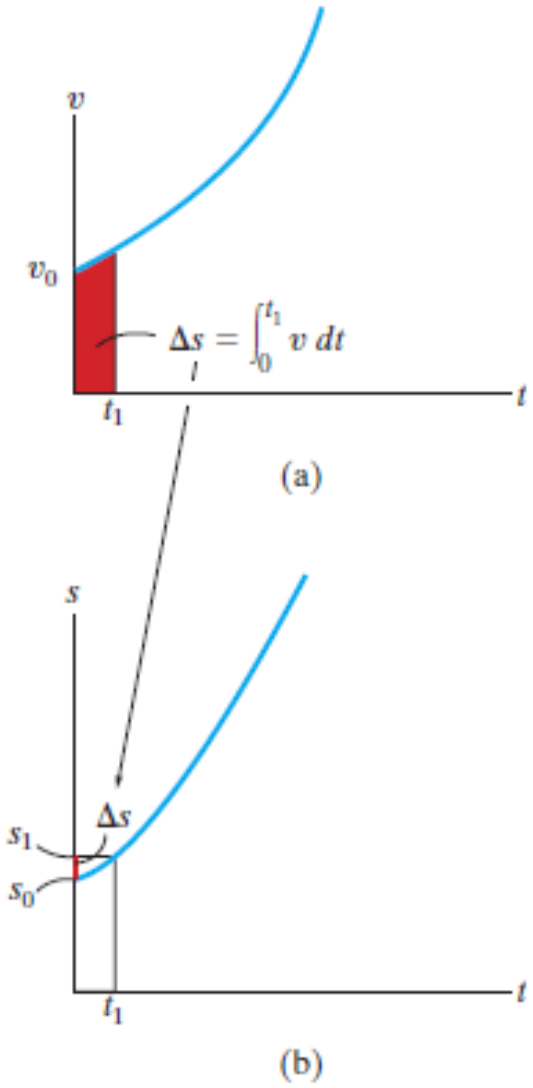
v – t grafiği için parçacığın **bilinen** v_0 hızına *a – t* grafiğinden elde edilen küçük alan artımları (Δv) eklenir.

$$\Delta v = \int a\,dt$$

Hızdaki değişim = *a – t grafiği altındaki alan*

12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

v – t Grafiği verildiğinde *s – t* Grafiğini Oluşturmak.



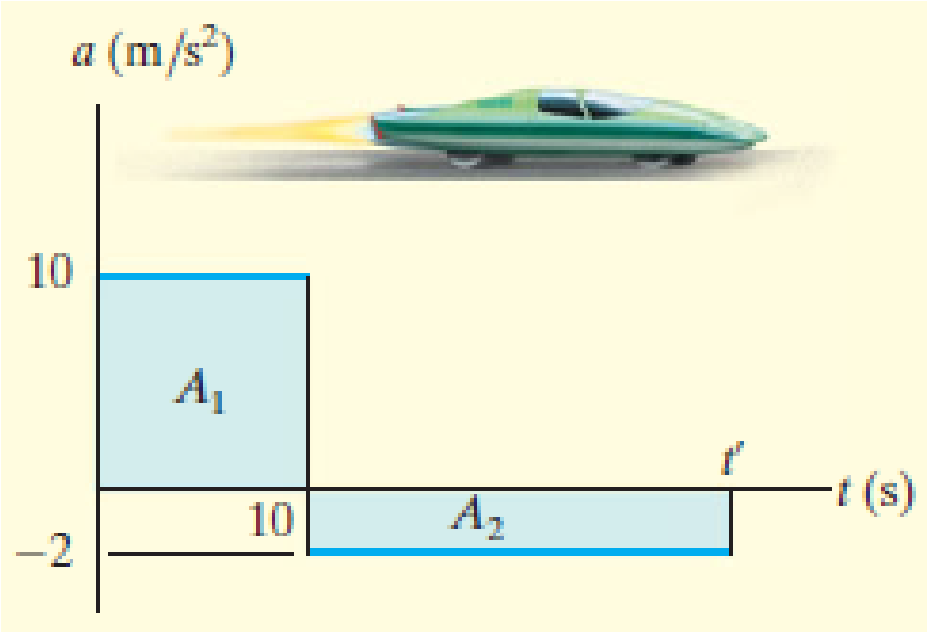
Bir zaman aralığında parçacığın yer değiştirmesi aynı zaman aralığında *v – t* grafiği altındaki alana eşittir.

s – t grafiği için parçacığın **bilinen** s_0 konumuna *s – t* grafiğinden elde edilen küçük alan artımları (Δs) eklenir.

$$\Delta s = \int v\,dt$$

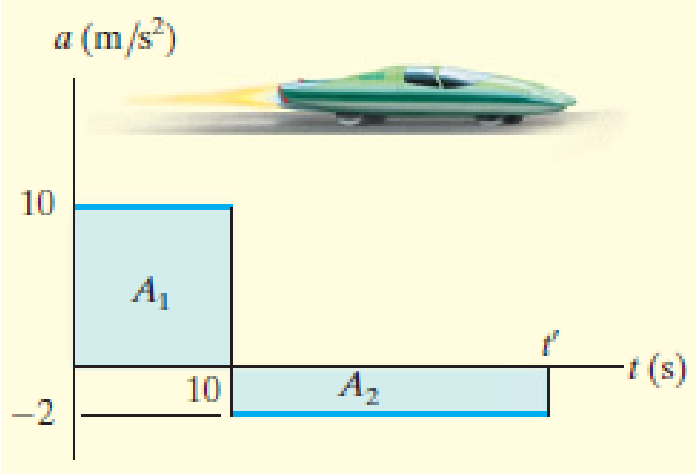
Yer değiştirme = *v – t grafiği altındaki alan*

Örnek 12-7



Şekildeki araba durmakta iken harekete başlar ve düz bir yol üzerinde 10 s boyunca sabit ivmeyle hızlanıp sonra da sabit ivmeyle yavaşlayacak şekilde ilerler. *v* – *t* ve *s* – *t* grafiklerini çiziniz ve arabanın durması için gereken *t'* zamanını belirleyiniz. Araba ne kadar yol almıştır?

Örnek 12-7

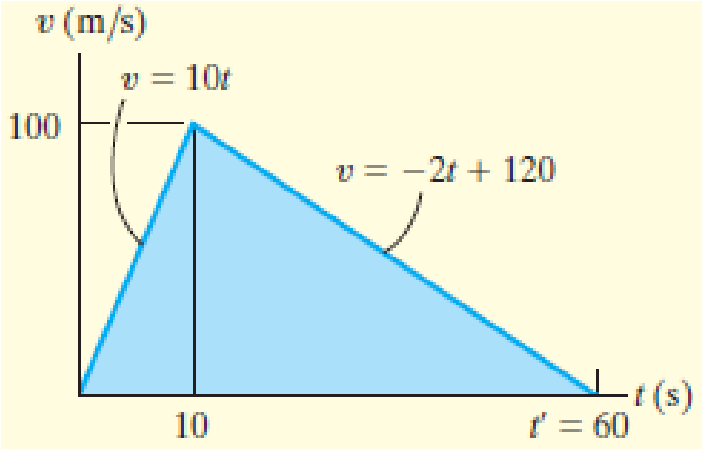


v – t Grafiği.

$$0 \le t < 10\ \text{s}; \quad a = (10)\ \text{m/s}^2; \quad \int_0^v dv = \int_0^t 10\, dt, \qquad v = 10t$$

$$10\ \text{s} < t \le t'; \ a = (-2)\ \text{m/s}^2; \quad \int_{100\ \text{m/s}}^v dv = \int_{10\ \text{s}}^t -2\, dt, \ v = (-2t + 120)\ \text{m/s}$$

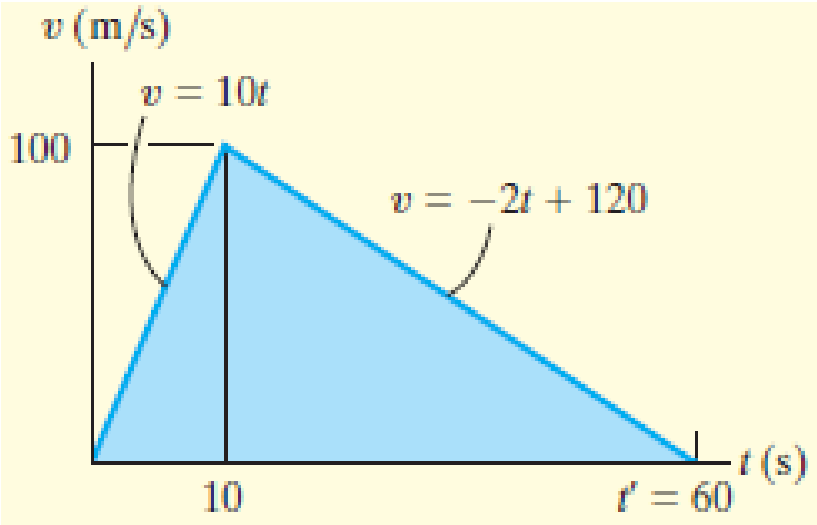
$$t = t' \qquad v = 0 \qquad t' = 60\ \text{s}$$



$$\Delta v = 0 = A_1 + A_2,$$

$$0 = 10\ \text{m/s}^2(10\ \text{s}) + (-2\ \text{m/s}^2)(t' - 10\ \text{s})$$
$$t' = 60\ \text{s}$$

Örnek 12-7



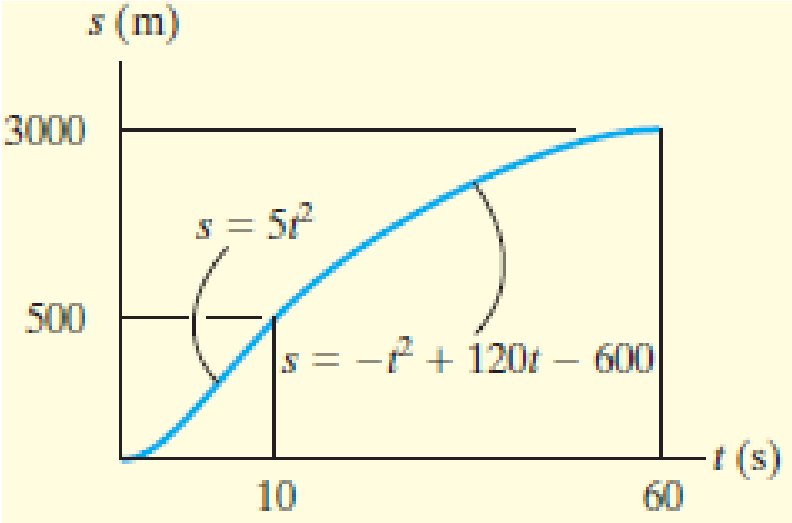
s – t Grafiği.

$$0 \le t \le 10\text{ s}; \quad v = (10t)\text{ m/s}; \quad \int_0^s ds = \int_0^t 10t\,dt, \qquad s = (5t^2)\text{ m}$$

$$10\text{ s} \le t \le 60\text{ s}; \quad v = (-2t + 120)\text{ m/s}; \quad \int_{500\text{ m}}^s ds = \int_{10\text{ s}}^t (-2t + 120)\,dt$$

$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$

$$s = (-t^2 + 120t - 600)\text{ m}$$

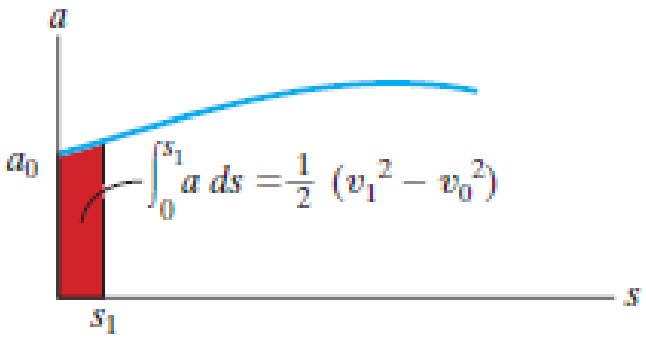


$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3000\text{ m}$$

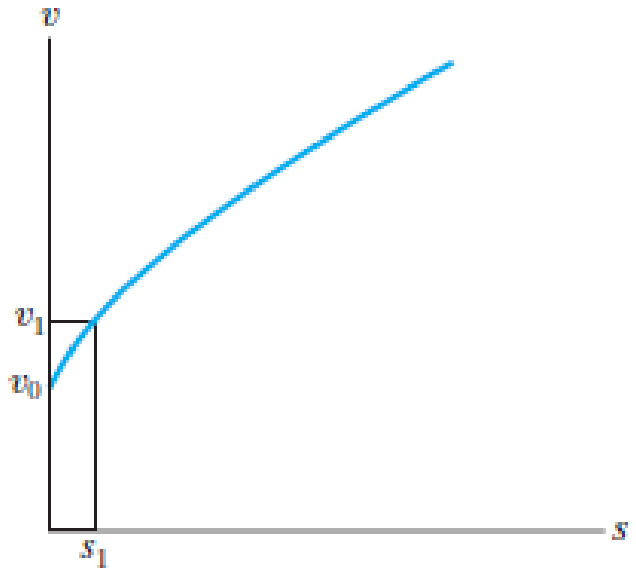
$$\Delta s = \tfrac{1}{2}(60\text{ s})(100\text{ m/s}) = 3000\text{ m}$$

12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

a – s Grafiği verildiğinde *v – s* Grafiğini Oluşturmak.



(a)



(b)

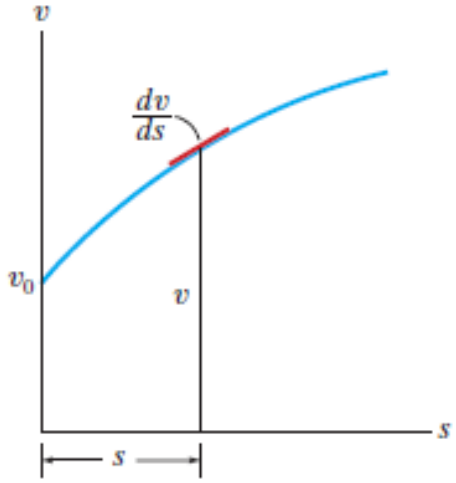
v – s grafiği üzerindeki noktalar, *v dv = a ds* ifadesi kullanılarak belirlenebilir. Bu denklem, $s = s_0$'da $v = v_0$ ve $s = s_1$'de $v = v_1$ sınır değerleri arasında integre edilir:

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

a – s grafiği altındaki alan

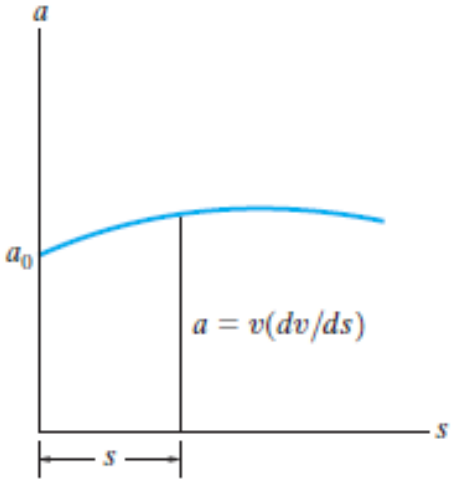
12.2 Doğrusal Kinematik: Düzensiz Hareket

v – s Grafiği verildiğinde *a – s* Grafiğini Oluşturmak.



(a)

Herhangi bir (*s, v*) noktasında, *v – s* grafiğinin *dv/ds* eğimi belirlenir. *a ds = v dv* veya *a = v (dv/ds)* olduğundan, *v* ile *dv/ds* bilindiğinde, *a* belirlenebilir.

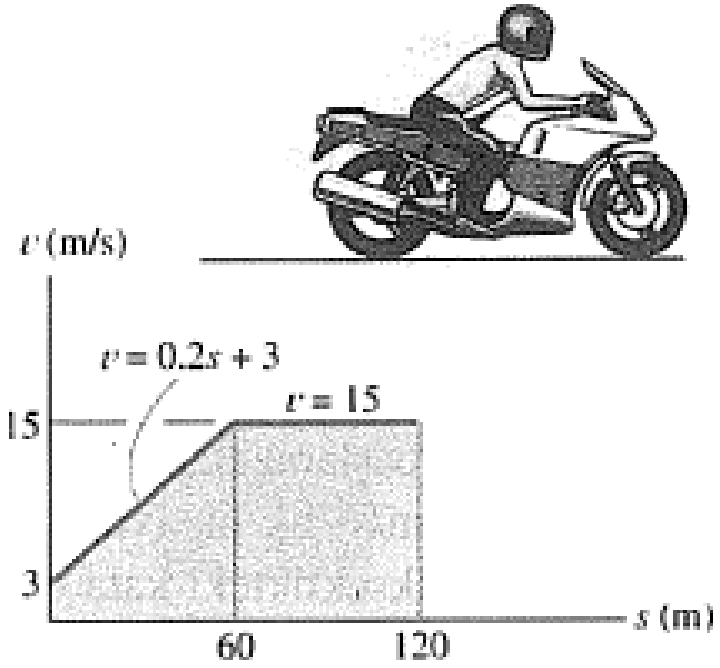


(b)

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

ivme = *hız çarpı v – s grafiğinin eğimi*

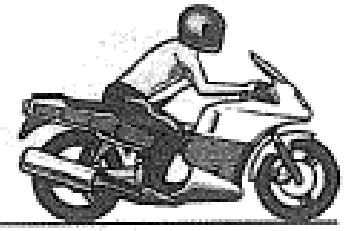
Örnek 12-8

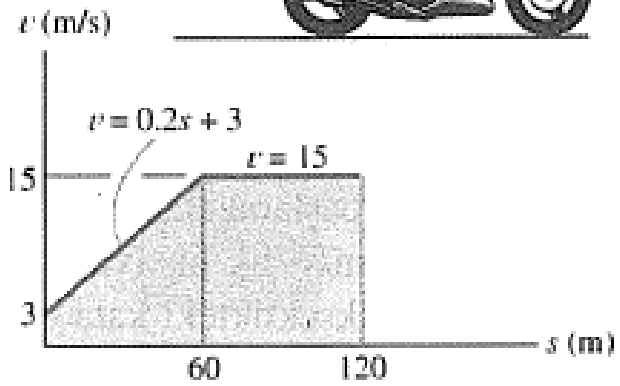


Bir motorsikletin hareketini tanımlayan *v* – *s* grafiği görülmektedir.

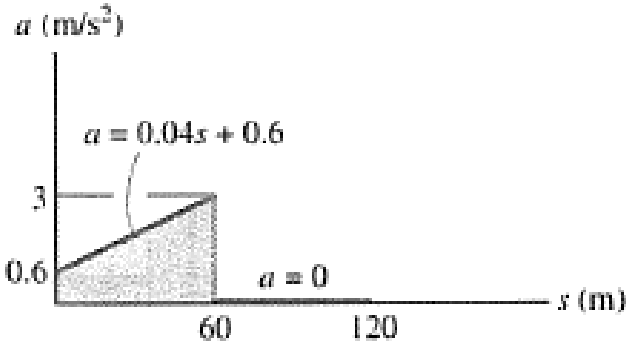
Hareketin *a* – *s* grafiğini oluşturunuz ve motorsikletin *s* = 120 m konumuna ulaşması için gerekli zamanı belirleyiniz.

Örnek 12-8





(a)



(b)

a – s Grafiği.

$0 \le s < 60$ m;

$$v = 0.2s + 3$$

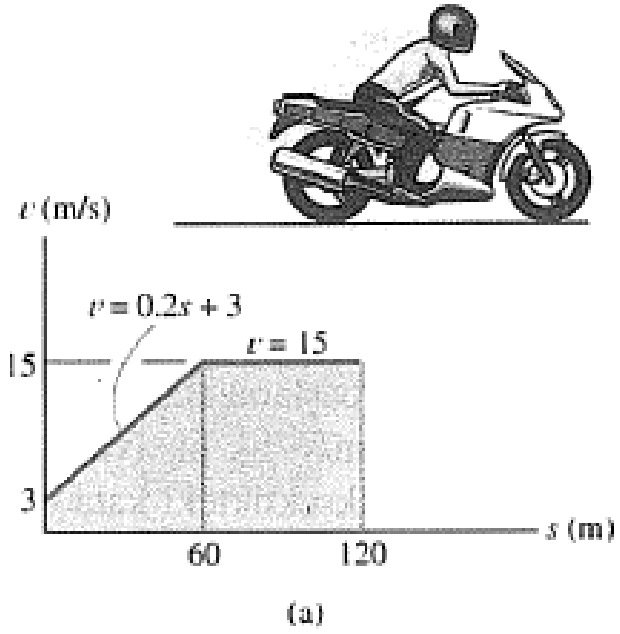
$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.2s + 3)\frac{d}{ds}(0.2s + 3) = 0.04s + 0.6$$

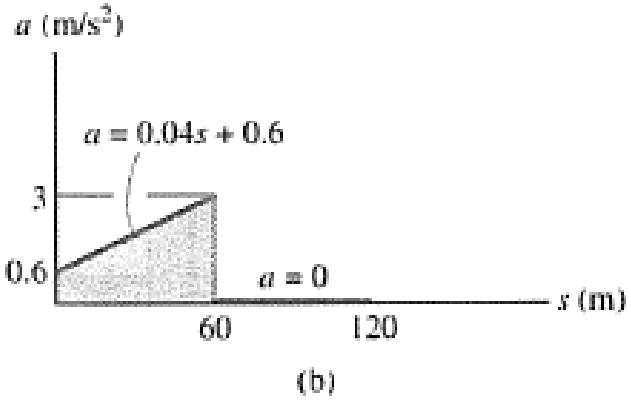
$60 \text{ m} < s \le 120$ m; $v = 15$;

$$a = v\frac{dv}{ds} = (15)\frac{d}{ds}(15) = 0$$

Örnek 12-8

Zaman.





$$0 \le s < 60 \text{ m}; \; v = 0.2s + 3; \; dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{0.2s + 3}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 3}$$

$$t = 5 \ln (0.2s + 3) - 5 \ln 3$$

$$s = 60 \text{ m de}, \; t = 5 \ln [0.2(60) + 3] - 5 \ln 3 = 8.05 \text{ s}$$

$$60 \text{ m} < s \le 120 \text{ m}; \; v = 15; \; dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{15}$$

$$\int_{8.05}^t dt = \int_{60}^s \frac{ds}{15}$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{15} - 4$$

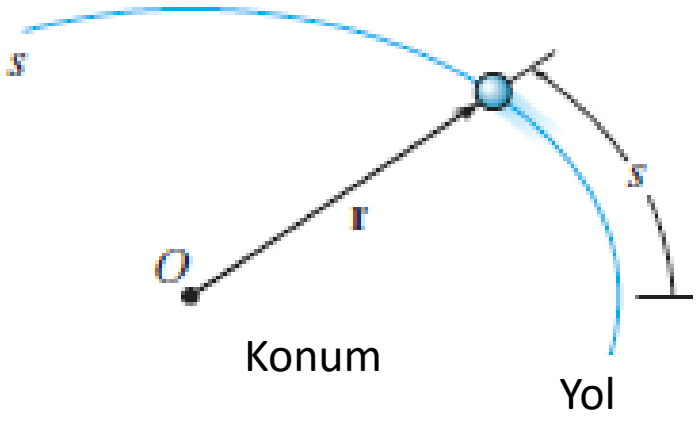
$$t = \frac{s}{15} + 4.05$$

$$s = 120 \text{ m de},$$

$$t = \frac{120}{15} + 4.05 = 12.0 \text{ s}$$

12.3 Genel Eğrisel Hareket

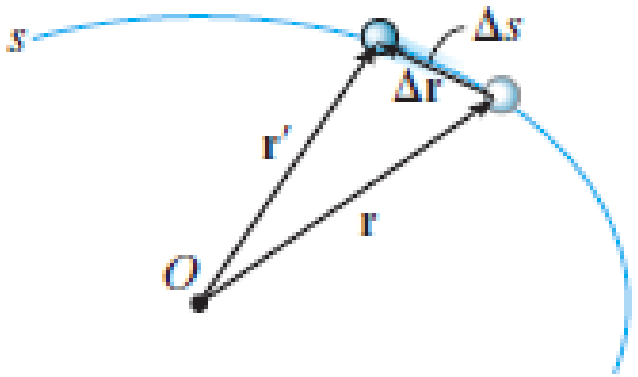
Eğrisel hareket, parçacık eğrisel bir yol üzerinde hareket ettiğinde oluşur. Bu yol genellikle üç boyutta tanımlandığından, parçacığın konumu, hızı ve ivmesini formüle etmek için vektör analizi kullanılır.



Konum. *O* sabit noktasından ölçülen parçacığın konumu, *konum vektörü* **r** = **r**(*t*) ile belirtilecektir. Parçacık eğri üzerinde hareket ettikçe büyüklüğü ve yönü değiştiğinden, bu vektör zamanın bir fonksiyonudur.

12.3 Genel Eğrisel Hareket

Yer Değiştirme. Küçük bir Δt zaman aralığında, parçacığın eğri üzerinde Δs yolu alarak $\mathbf{r'} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ ile tanımlanan yeni konumuna geldiğini varsayalım. $\Delta\mathbf{r}$ yer değiştirmesi parçacığın konumundaki değişimi gösterir ve vektör farkı ile belirlenir; $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r'} - \mathbf{r}$.



Yer Değiştirme

12.3 Genel Eğrisel Hareket

Hız.

Ortalama Hız

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Anlık Hız

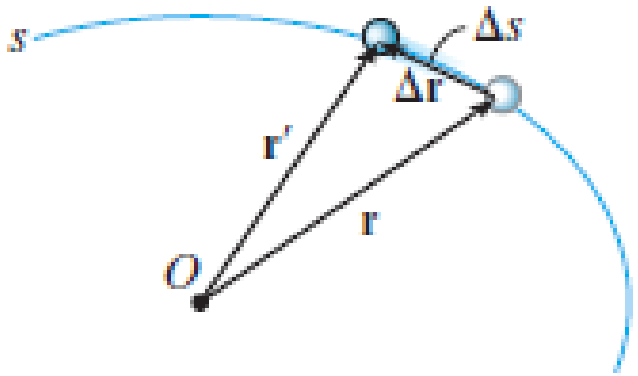
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{r}/\Delta t)$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

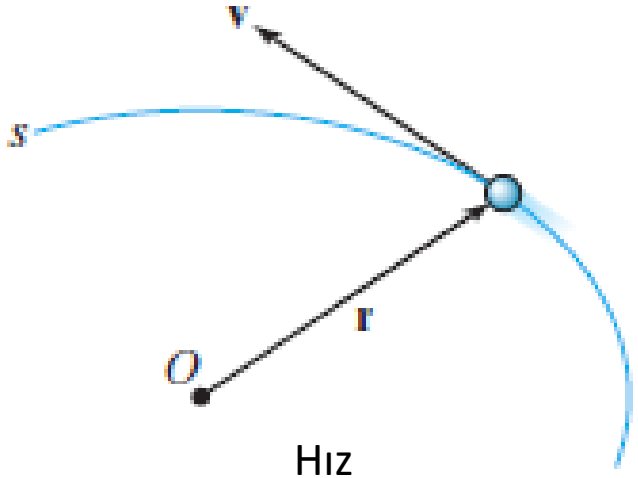
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t)$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Hızın şiddeti



Yer Değiştirme



Hız

12.3 Genel Eğrisel Hareket

İvme.

Ortalama İvme

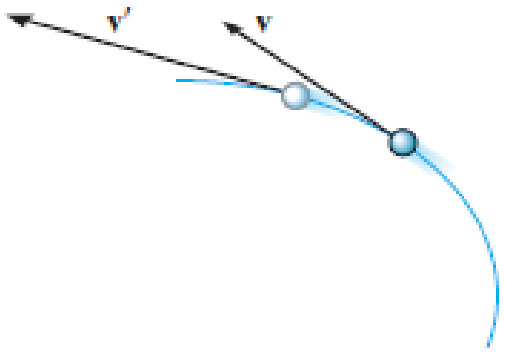
$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

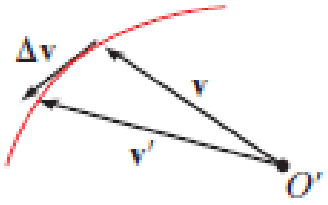
Anlık İvme

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$$

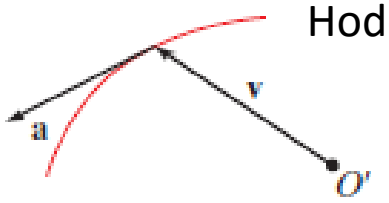
$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$





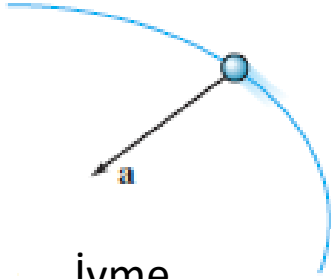
Hodograf



Hodograf

Zamana bağlı değişimi incelemek için iki hız vektörü, başlangıçları *O'* sabit noktasında, ok uçları eğrinin üzerinde olacak şekilde çizilmiştir. Bu eğriye *hodograf* denir.

v her zaman yörüngeye teğettir ve **a** her zaman hodografa teğettir.



İvme

Yol

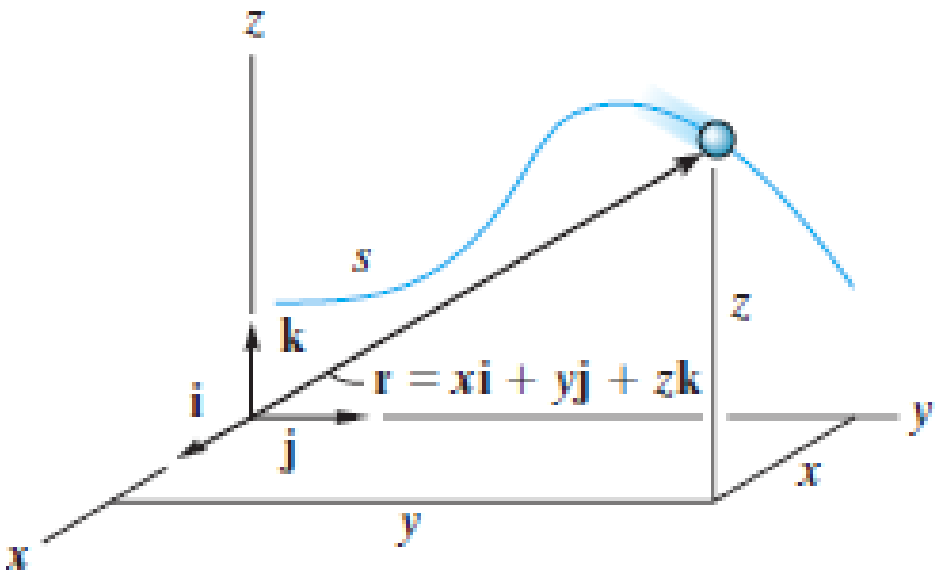
12.4 Eğrisel Hareket: Dik Bileşenler

Bazen bir parçacığın hareketi, en iyi, sabit *x*, *y*, *z* referans sistemi kullanılarak gösterilen bir yörünge üzerinde tanımlanabilir.

Konum. Verilen bir anda *P* parçacığı *s* eğrisel yolu üzerinde (*x, y, z*) noktasında ise parçacığın konumu, *konum vektörü* **r** = **r**(*t*) ile tanımlanır. *x = x(t), y = y(t), z = z(t)*'dir.
r'nin büyüklüğü daima pozitiftir.

$$\boxed{\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r.$$

12.4 Eğrisel Hareket: Dik Bileşenler

Hız. r'nin zamana göre birinci türevi parçacığın **v** hızını verir.

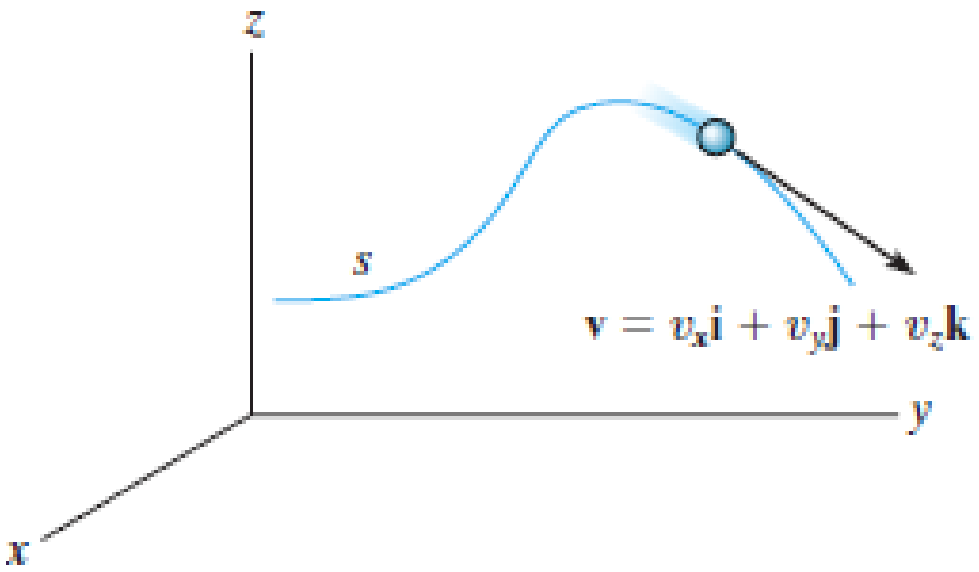
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}}$$

$$\boxed{v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



$\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v.$

12.4 Eğrisel Hareket: Dik Bileşenler

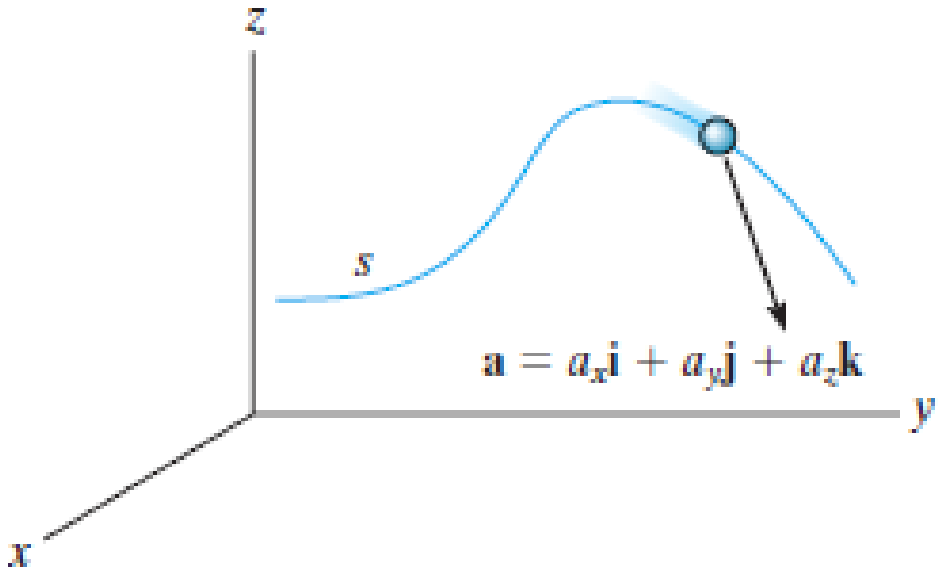
İvme. Bir parçacığın hızının zamana göre birinci türevi, ivmeyi verir.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

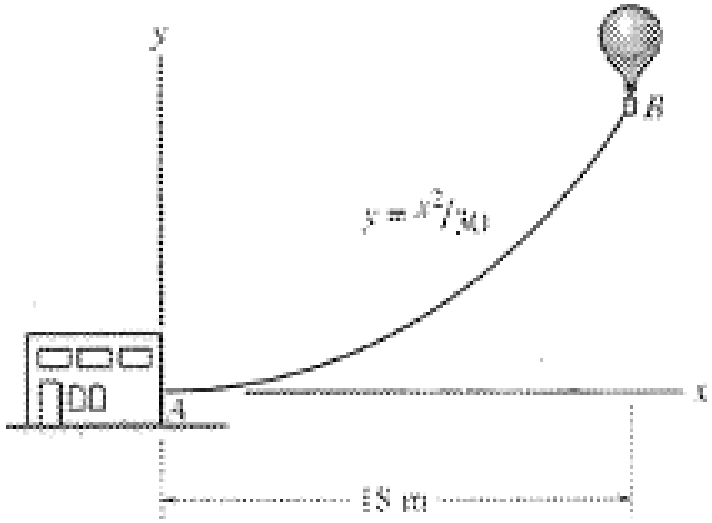
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



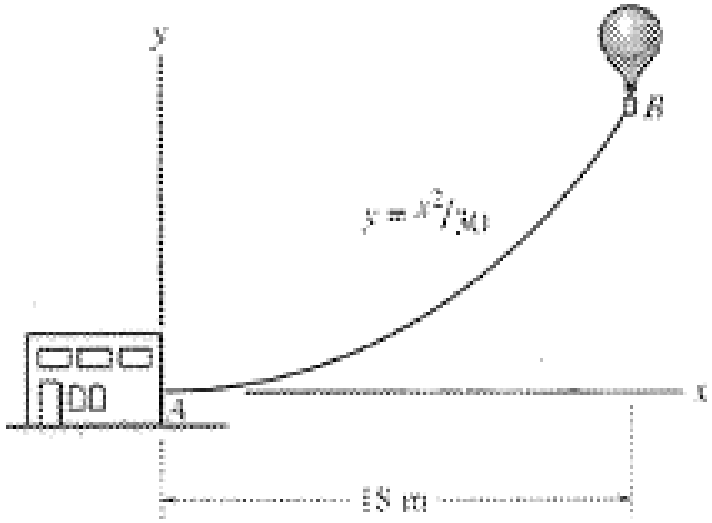
$$\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a.$$

Örnek 12-9



Şekildeki meteoroloji balonunun yatay konumu herhangi bir anda, t saniye cinsinden verilmek üzere, $x = (9t)$ m ile tanımlanıyor. Yörünge denklemi $y = x^2/30$ ile verildiğine göre, $t = 2$ s iken (a) balonun A'daki istasyon uzaklığını, (b) hız vektörünün doğrultu ve büyüklüğünü ve (c) ivme vektörünün doğrultu ve büyüklüğünü belirleyiniz.

Örnek 12-9



Konum.

$$t = 2 \text{ s iken } x = 9(2) \text{ m} = 18 \text{ m}$$

$$y = (18)^2/30 = 10.8 \text{ m}$$

$$r = \sqrt{(18)^2 + (10.8)^2} = 21 \text{ m}$$

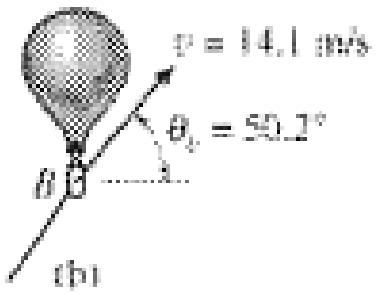
Hız.

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(9t) = 9 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$v_y = \dot{y} = 2x\dot{x}/30 = 2(18)(9)/30 = 10.8 \text{ m/s} \uparrow$$

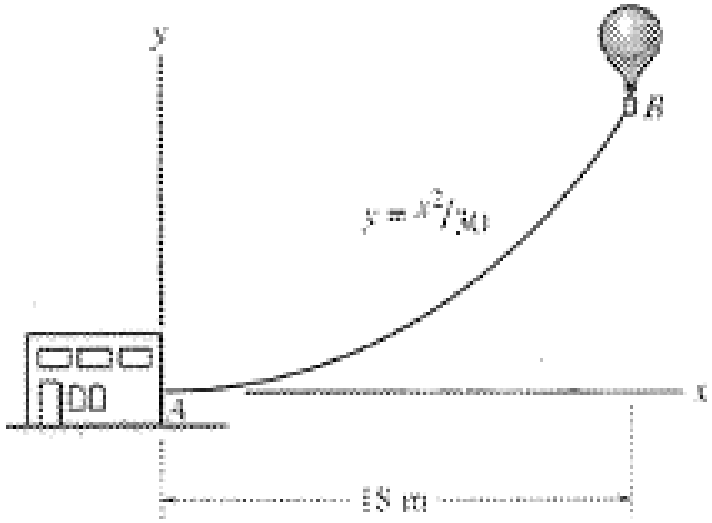
$$v = \sqrt{(9)^2 + (10.8)^2} = 14.1 \text{ m/s}$$

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{10.8}{9} = 50.2°$$



Örnek 12-9

İvme.



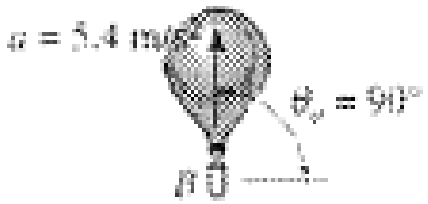
$$a_x = \dot{v}_x = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/30) = 2(\dot{x})\dot{x}/30 + 2x(\ddot{x})/30$$

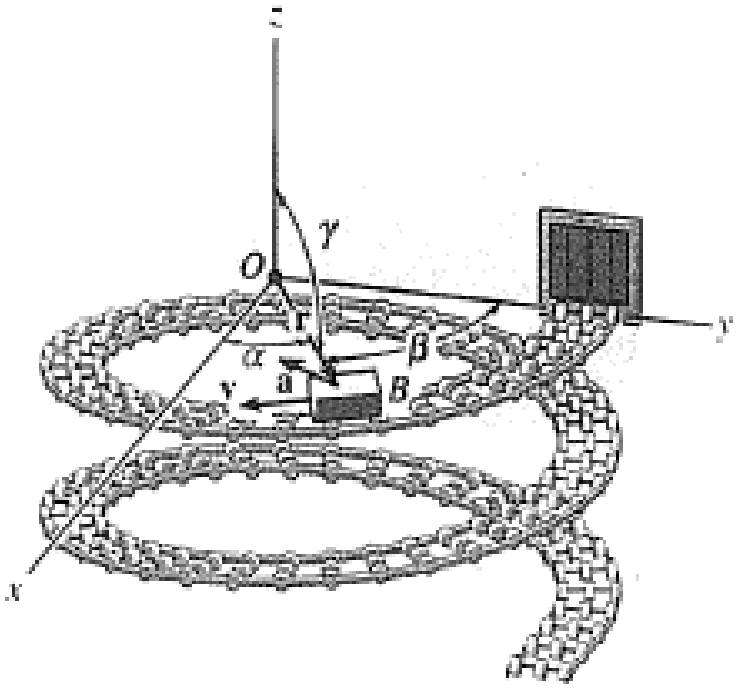
$$= 2(9)^2/30 + 2(18)(0)/30 = 5.4 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

$$a = \sqrt{(0)^2 + (5.4)^2} = 5.4 \text{ m/s}^2$$

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{5.4}{0} = 90°$$



Örnek 12-10

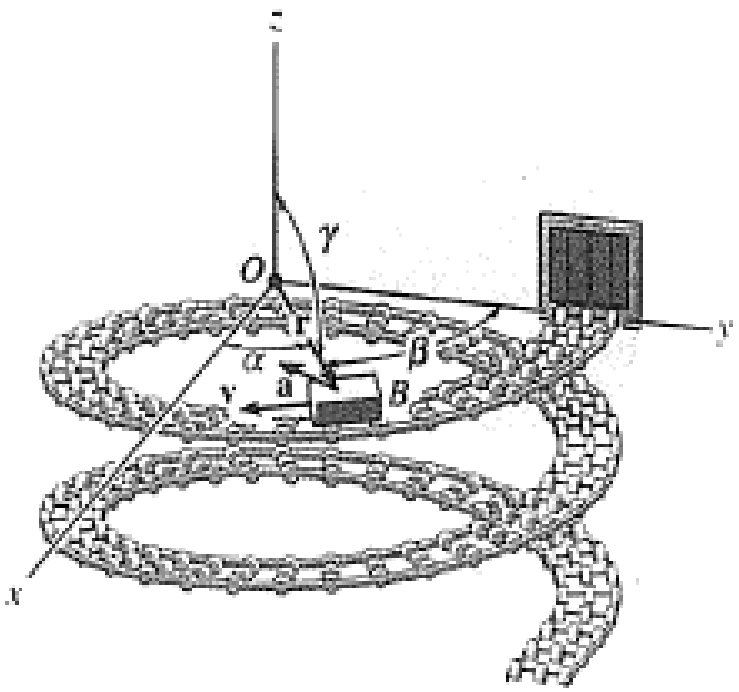


B kutusunun hareketi, *t* saniye, sinüs ve kosinüs argümanları radyan cinsinden verilmek üzere, aşağıdaki konum vektörü ile tanımlanıyor. *t* = 0.75 s iken kutunun konumunu, hız ve ivme vektörlerinin büyüklüğünü belirleyiniz.

$$\mathbf{r} = \{0.5\sin(2t)\mathbf{i} + 0.5\cos(2t)\mathbf{j} - 0.2t\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

Örnek 12-10

Konum.



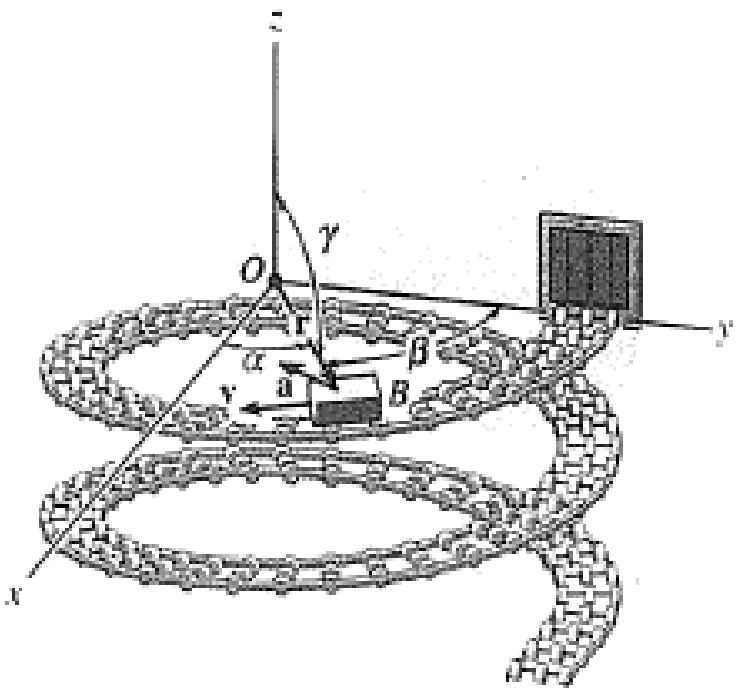
$$\mathbf{r}\big|_{t=0.75\ \mathrm{s}} = \{0.5 \sin(1.5\ \mathrm{rad})\mathbf{i} + 0.5 \cos(1.5\ \mathrm{rad})\mathbf{j} - 0.2(0.75)\mathbf{k}\}\ \mathrm{m}$$
$$= \{0.499\mathbf{i} + 0.035\mathbf{j} - 0.150\mathbf{k}\}\ \mathrm{m}$$

$$r = \sqrt{(0.499)^2 + (0.035)^2 + (-0.150)^2} = 0.522\ \mathrm{m}$$

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{0.499}{0.522}\mathbf{i} + \frac{0.035}{0.522}\mathbf{j} - \frac{0.150}{0.522}\mathbf{k}$$
$$= 0.956\mathbf{i} + 0067\mathbf{j} - 0.287\mathbf{k}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0.956) = 17.1^\circ$$
$$\beta = \cos^{-1}(0.067) = 86.2^\circ$$
$$\gamma = \cos^{-1}(-0.287) = 106^\circ$$

Örnek 12-10



Hız.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0.5\sin(2t)\mathbf{i} + 0.5\cos(2t)\mathbf{j} - 0.2t\mathbf{k}\right]$$

$$= \{1\cos(2t)\mathbf{i} - 1\sin(2t)\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$= \sqrt{[1\cos(1.5\ \text{rad})]^2 + [-1\sin[1.5\ \text{rad})]^2 + (-0.2)^2}$$

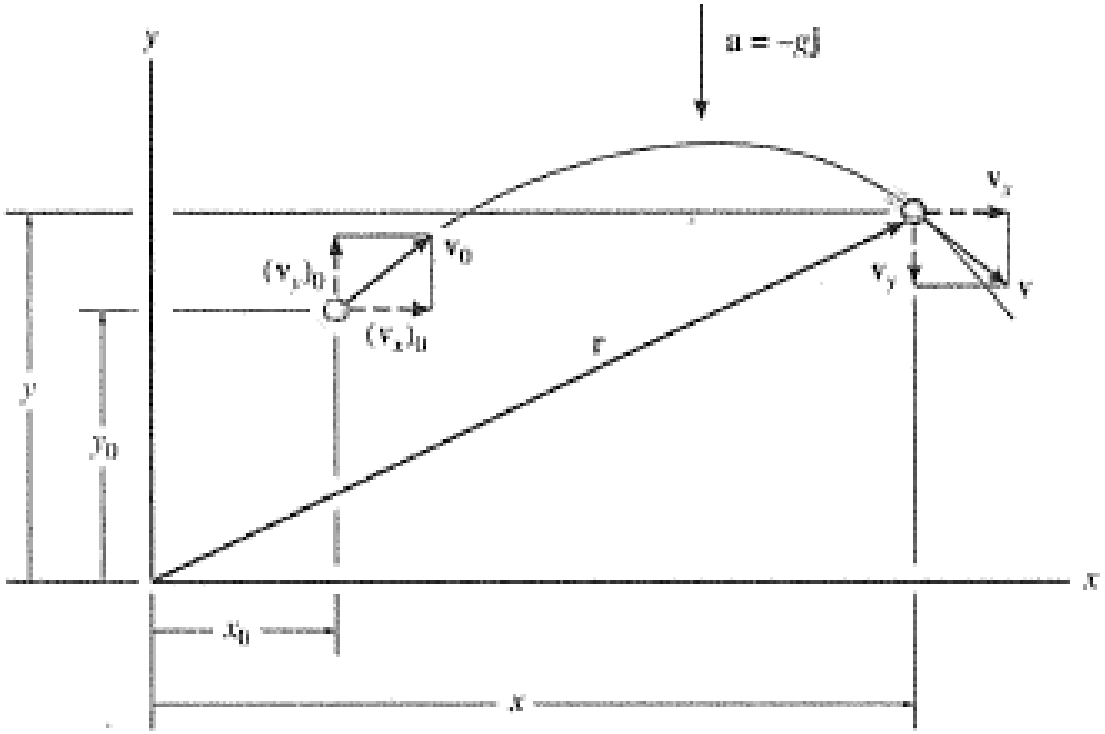
$$= 10.2\ \text{m/s}$$

İvme.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \{-2\sin(2t)\mathbf{i} - 2\cos(2t)\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2\Big|_{t=0.75\ \text{s}} = 2\text{m/s}^2$$

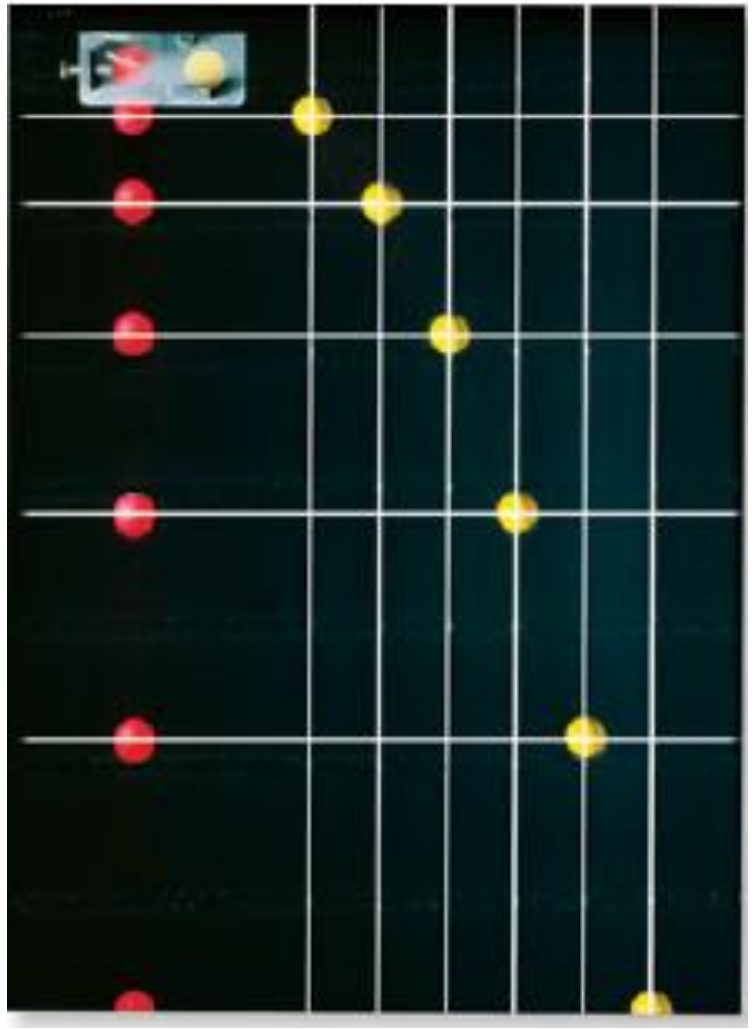
12.5 Mermi Hareketi

Bir merminin serbest uçuş hareketi, merminin ivmesi daima düşey doğrultuda olduğundan, çoğu kez dik bileşenler cinsinden incelenir. Hava direnci ihmal edildiğinde mermiye etkiyen tek kuvvet, merminin ağırlığıdır.

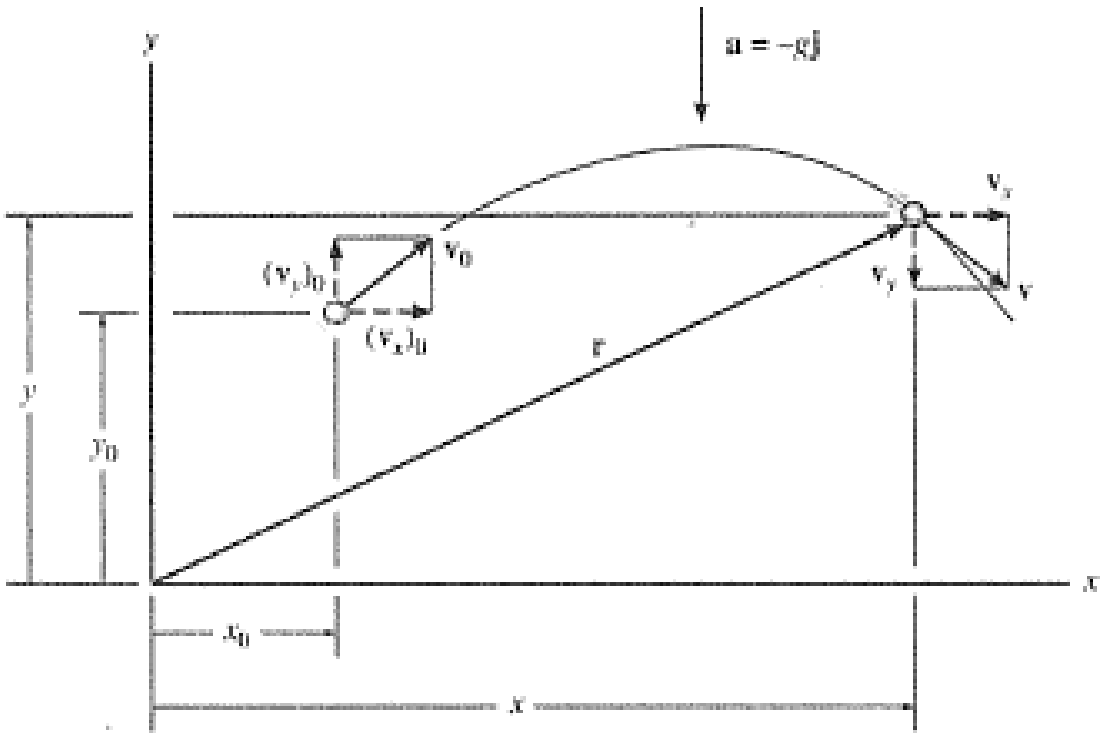


12.5 Mermi Hareketi

Ardışık her resim eşit zaman aralıklarında çekilmiştir. Kırmızı top serbest düşme hareketi yaparken sarı top bırakıldığı anda yatay bir hıza sahiptir. İki top da aşağıya doğru aynı oranda ivmelenirler. Dolayısıyla, her bir anda aynı yüksekliktedirler. İvme nedeniyle aşağıya doğru inildikçe, resimler arasındaki aralık artmaktadır. Bununla birlikte, yatay hız sabit olduğu için, farklı anlarda sarı topun aldığı yatay mesafe değişmez.



12.5 Mermi Hareketi



Yatay hareket.

$(\overset{+}{\rightarrow})v = v_0 + a_c t;$ $\qquad v_x = (v_x)_0$

$(\overset{+}{\rightarrow})x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$ $\qquad x = x_0 + (v_x)_0 t$

$(\overset{+}{\rightarrow})v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$ $\qquad v_x = (v_x)_0$

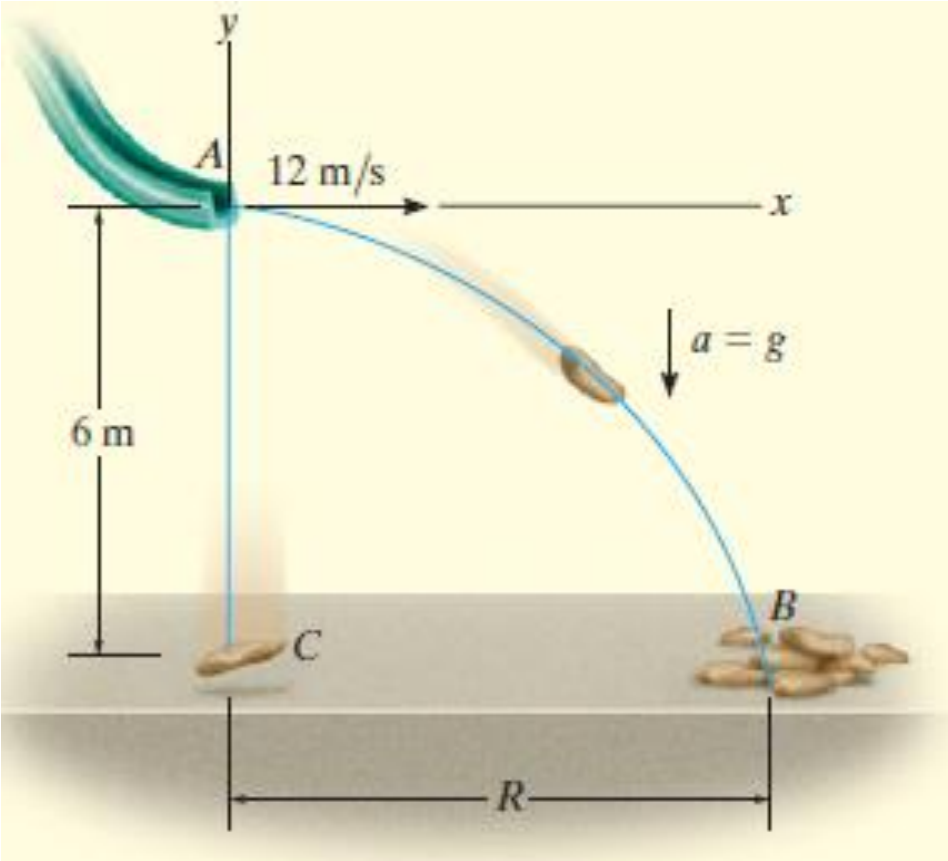
Düşey hareket.

$(+\uparrow)v = v_0 + a_c t;$ $\qquad v_y = (v_y)_0 - gt$

$(+\uparrow)y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$ $\qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2;$

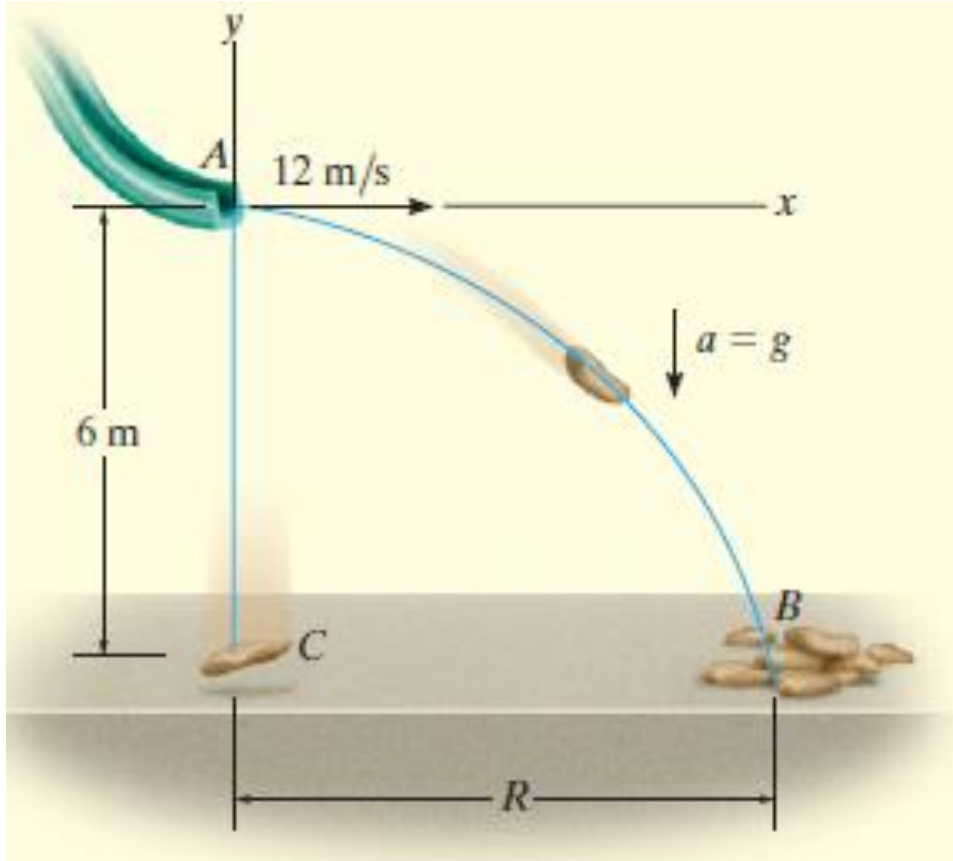
$(+\uparrow)v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0);$ $\qquad v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$

Örnek 12-11



Bir çuval 12 m/s'lik bir yatay hızla bir rampadan aşağıya kaymaktadır. Rampanın yerden yüksekliği 6 m olduğuna göre, çuvalın döşemeye çarpması için gerekli zamanı ve çuvalların yığılmaya başladığı alanın *R* genişliğini belirleyiniz.

Örnek 12-11



Koordinat Sistemi.

$$(v_A)_x = 12 \text{ m/s} \qquad (v_A)_y = 0.$$

$$a_y = -9.81 \text{ m/s}^2. \qquad (v_B)_x = (v_A)_x = 12 \text{ m/s},$$

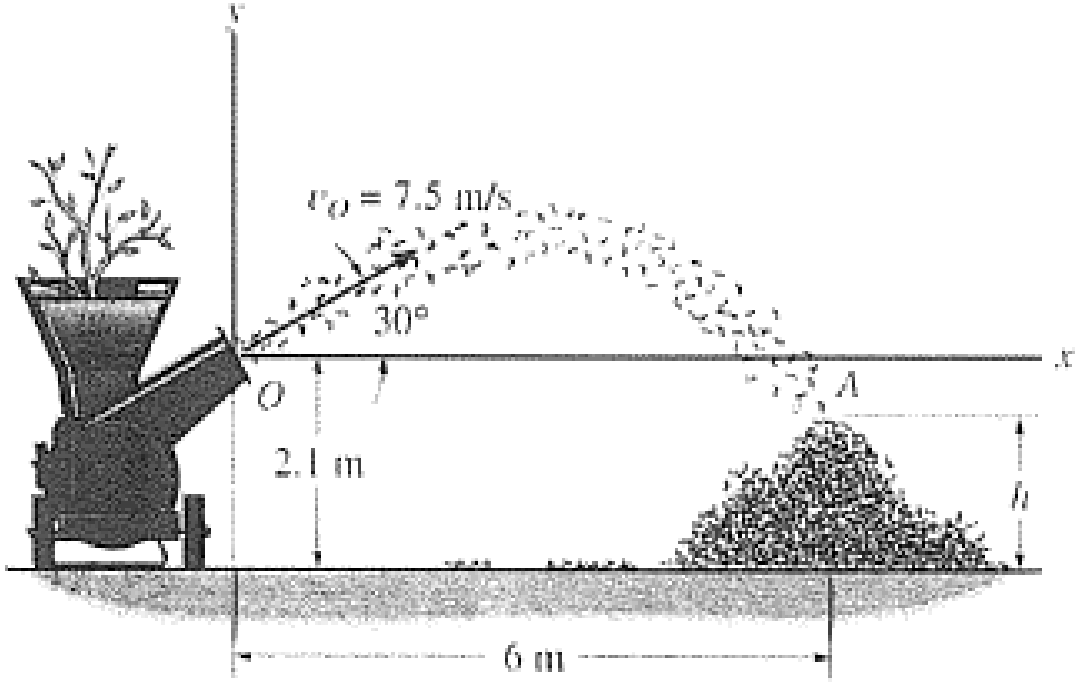
Düşey Hareket.

$$(+\uparrow) \qquad \begin{aligned} y_B &= y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2 \\ -6 \text{ m} &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2) t_{AB}^2 \\ t_{AB} &= 1.11 \text{ s} \end{aligned}$$

Yatay Hareket.

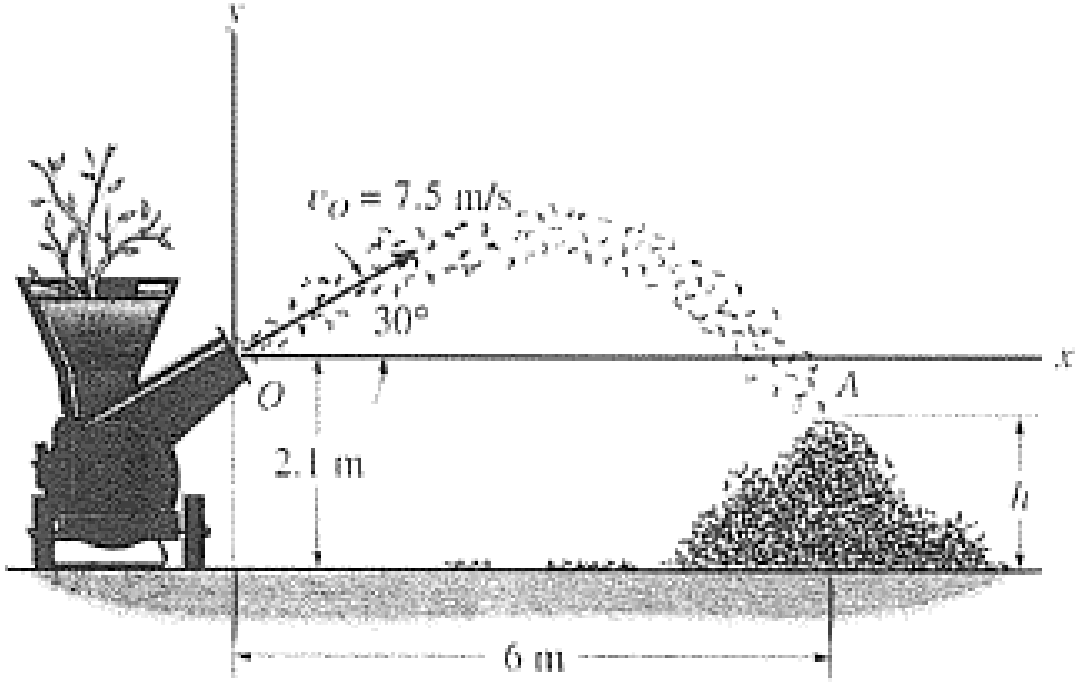
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \begin{aligned} x_B &= x_A + (v_A)_x t_{AB} \\ R &= 0 + 12 \text{ m/s } (1.11 \text{ s}) \\ R &= 13.3 \text{ m} \end{aligned}$$

Örnek 12-12



Talaş makinesi talaşları v_0 = 7.5 m/s ile fırlatmak üzere tasarlanmıştır. Boru yatayla 30˚ yapıyorsa ve talaşlar yığına borudan 6 m uzaklıkta ulaşıyorsa, yığına hangi *h* yüksekliğinde çarptıklarını belirleyiniz.

Örnek 12-12



Koordinat Sistemi.

$(v_O)_x = (7.5 \cos 30°)\ \text{m/s} = 6.50\ \text{m/s} \rightarrow$

$(v_O)_y = (7.5 \sin 30°)\ \text{m/s} = 3.75\ \text{m/s} \uparrow$

$(v_A)_x = (v_O)_x = 6.50\ \text{m/s}$ ve $a_y = -9.81\ \text{m/s}^2$

Yatay Hareket.

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\quad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$

$6\ \text{m} = 0 + (6.50\ \text{m/s}) t_{OA}$

$t_{OA} = 0.9231\ \text{s}$

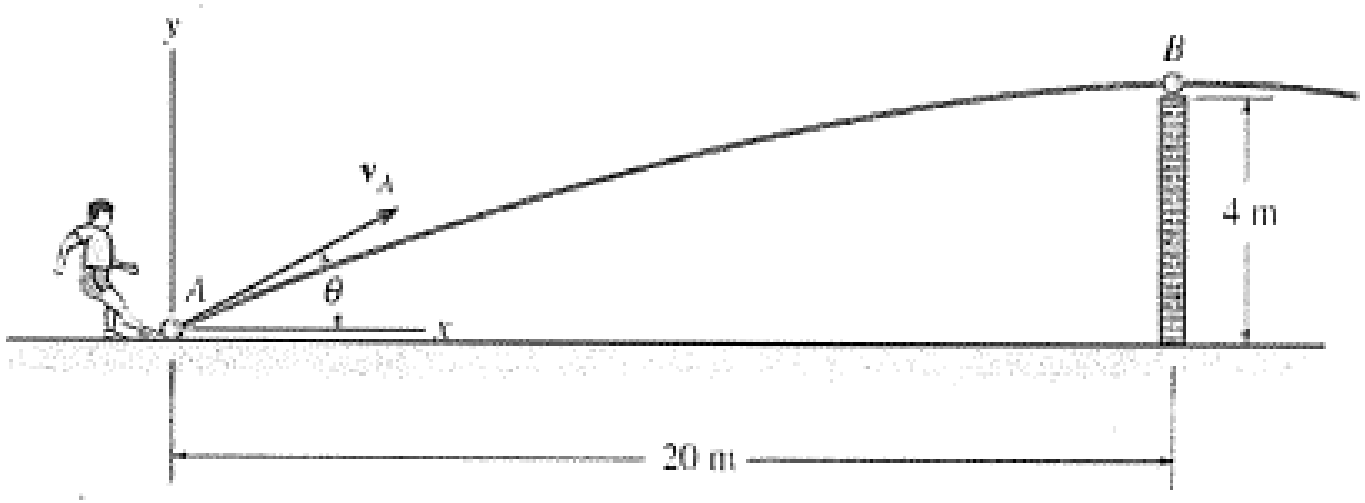
Düşey Hareket.

$(+\uparrow)$ $\quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \frac{1}{2} a_c t^2_{OA}$

$(h - 2.1\ \text{m}) = 0 + (3.75\ \text{m/s})(0.9231\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)(0.9231\ \text{s})^2$

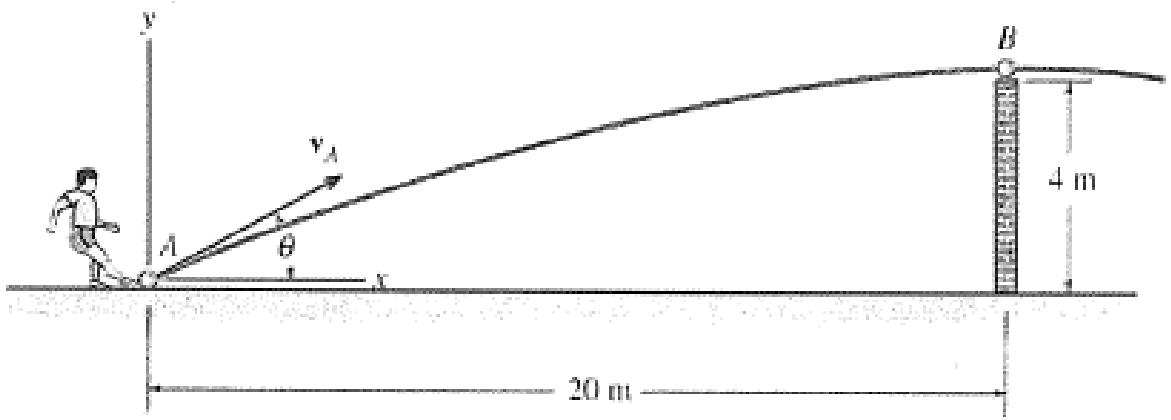
$h = 1.38\ \text{m}$

Örnek 12-13



A noktasında topa vurulduğunda , *B* noktasını maksimum yüksekliğe ulaşarak aştığı gözlemlenmiştir. *A*'dan duvara olan uzaklığın 20 m ve duvarın yüksekliğinin 4 m olduğunu göz önüne alarak, topun ayaktan çıktığı andaki başlangıç hızını belirleyiniz. Topun boyutlarını ihmal ediniz.

Örnek 12-13



Yatay Hareket.

$$(\xrightarrow{+}) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$20\text{ m} = 0 + (v_A \cos\theta)t_{AB}$$

Düşey Hareket.

$$(+\uparrow) \qquad (v_B)_y = (v_A)_y + a_c t_{AB}$$

$$0 = v_A \sin\theta - 9.81 t_{AB}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[y_B - y_A]$$

$$0 = v_A^2 \sin^2\theta + 2(-9.81\text{ m/s}^2)(4\text{ m} - 0)$$

$$v_A^2 \sin\theta + \theta = 196.2$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{2(9.81)(4)}{196.2} = 0.4$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.4) = 21.8°$$

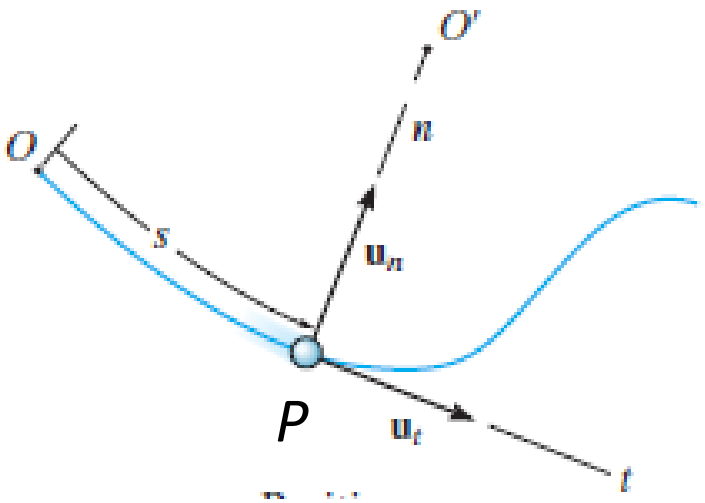
$$v_A = \sqrt{\frac{196.2}{(\sin 21.8°)(\cos 21.8°)}} = 23.9\text{ m/s}$$

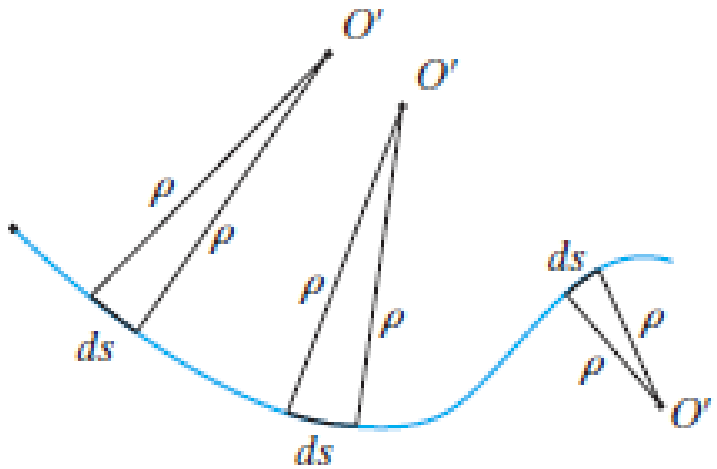
12.6 Eğrisel Hareket: Normal ve Teğetsel Bileşenler

Bir parçacığın izlediği yol *biliniyorsa*, hareketi, göz önüne alınan anda *orijini parçacıkla çakışan* ve yola sırasıyla normal ve teğet olarak etkiyen *n* ve *t* koordinatlarını kullanarak tanımlamak uygundur.

Düzlemsel Hareket. *t* ekseni *P*'de eğriye teğettir. Normal eksenin *yönünün* seçimi eğrinin *ds* diferansiyel yay parçalarından oluştuğu düşünülerek yapılabilir.

n ve *t* eksenlerinin bulunduğu düzlem, *oskülatör düzlem* olarak adlandırılır.



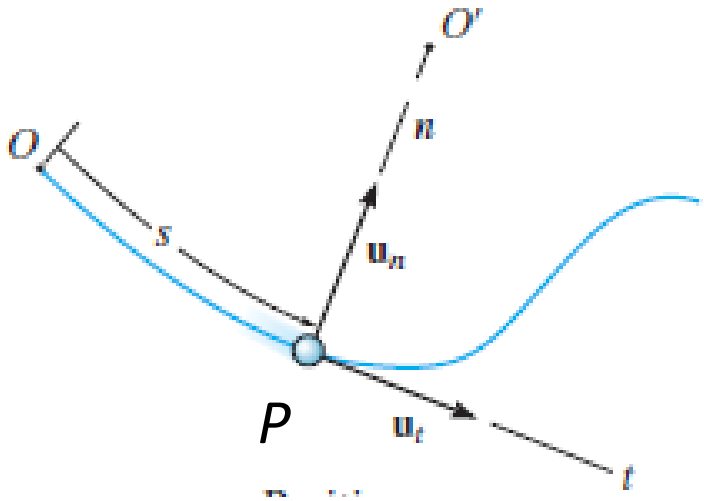


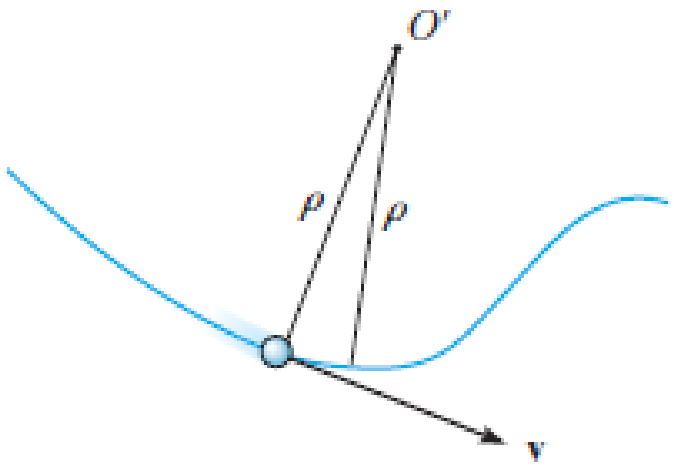
12.6 Eğrisel Hareket: Normal ve Teğetsel Bileşenler

Hız. Parçacık hareket ettiğinden, *s* zamanın bir fonksiyonudur. Parçacığın **v** hız vektörü, *daima yola teğettir* ve yol fonksiyonunun zamana göre türevi alınarak belirlenen *v = ds/dt* büyüklüğüne sahiptir.

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t$$

$$v = \dot{s}$$





12.6 Eğrisel Hareket: Normal ve Teğetsel Bileşenler

İvme. Parçacığın ivme vektörü, hız vektörünün zamana göre değişim oranıdır.

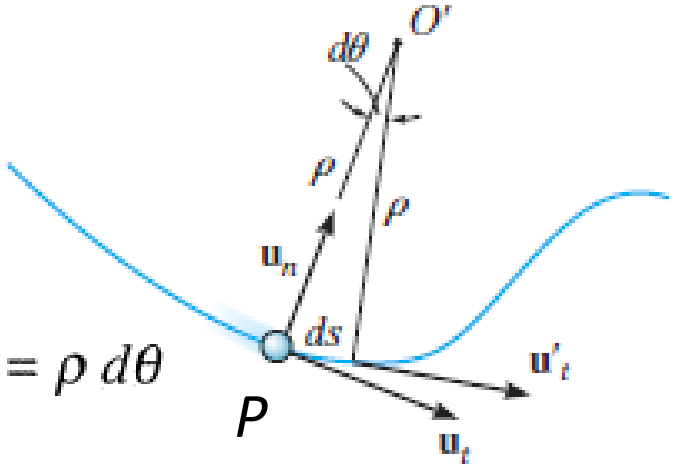
$$\boxed{\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$

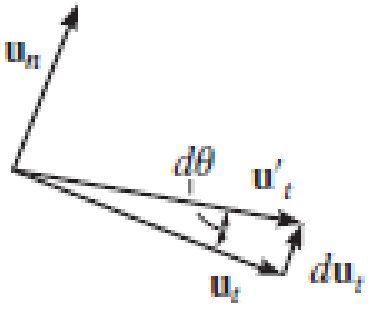
$$\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t \qquad du_t = (1)\,d\theta, \qquad d\mathbf{u}_t = d\theta\mathbf{u}_n$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n \qquad \dot{\theta} = \dot{s}/\rho$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$

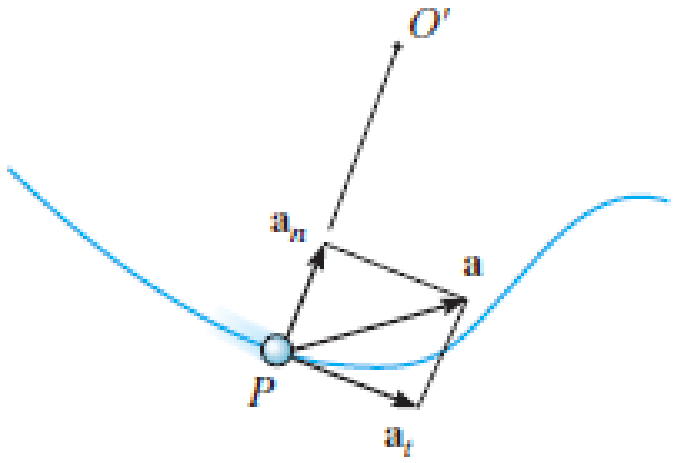


$ds = \rho\, d\theta$



$$\boxed{\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n} \qquad \boxed{a_t = \dot{v}} \qquad \boxed{a_t ds = v\,dv}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



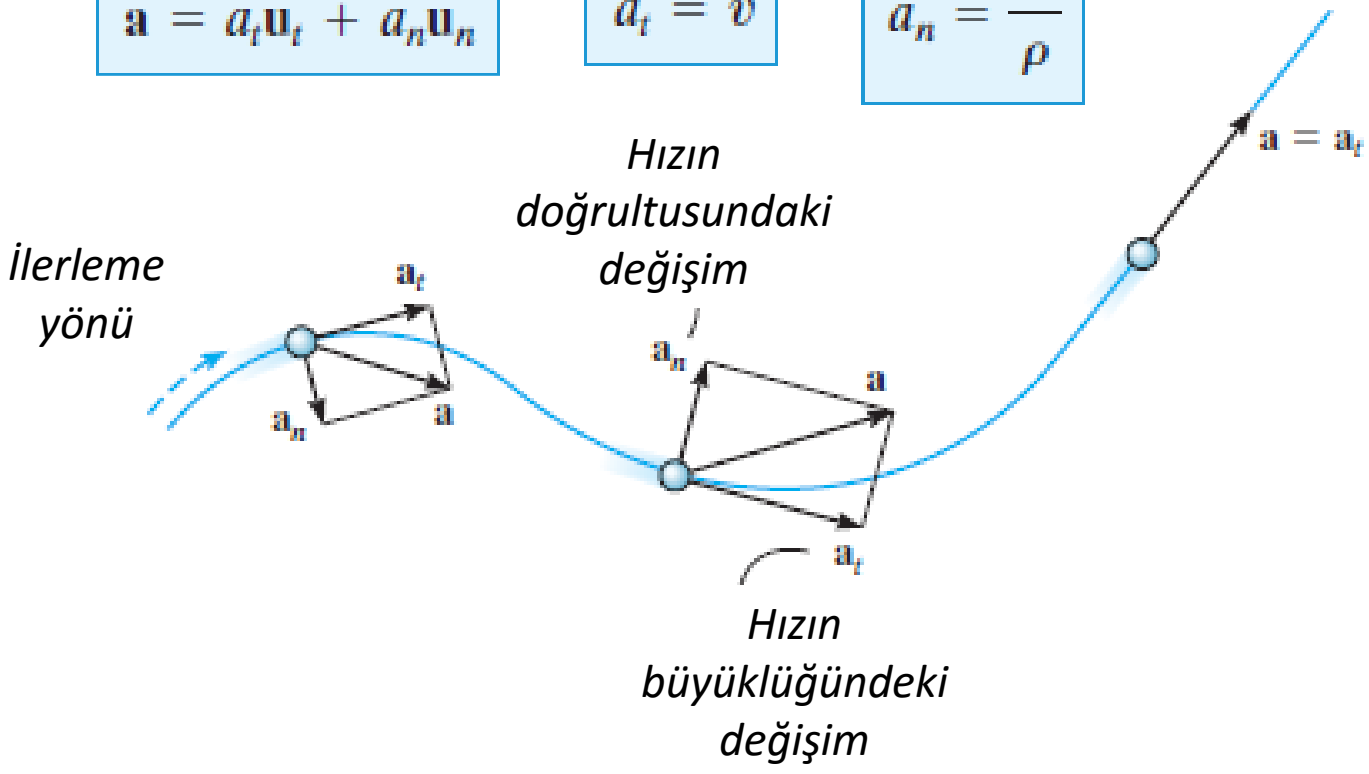
12.6 Eğrisel Hareket: Normal ve Teğetsel Bileşenler

1. Parçacık, bir doğru boyunca hareket ediyorsa, $\rho \rightarrow \infty$ olur ve $a_n = 0$ bulunur. Böylece, $a=a_t=\dot{v}$ olur. Yani, *ivmenin teğetsel bileşeni, hızın büyüklüğünün zamana göre değişim oranını ifade eder.*

2. Parçacık, sabit hızla bir eğri boyunca hareket ediyorsa, $a_t = \dot{v} = 0$ ve $a=a_n=v^2/\rho$ olur. Yani, *ivmenin normal bileşeni, hızın doğrultusunun zamana göre değişim oranını ifade eder*.

Bu bileşen, *daima eğrilik merkezine doğru etkidiğinden,* ***merkezcil ivme*** *olarak da adlandırılır.*

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n \qquad a_t = \dot{v} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



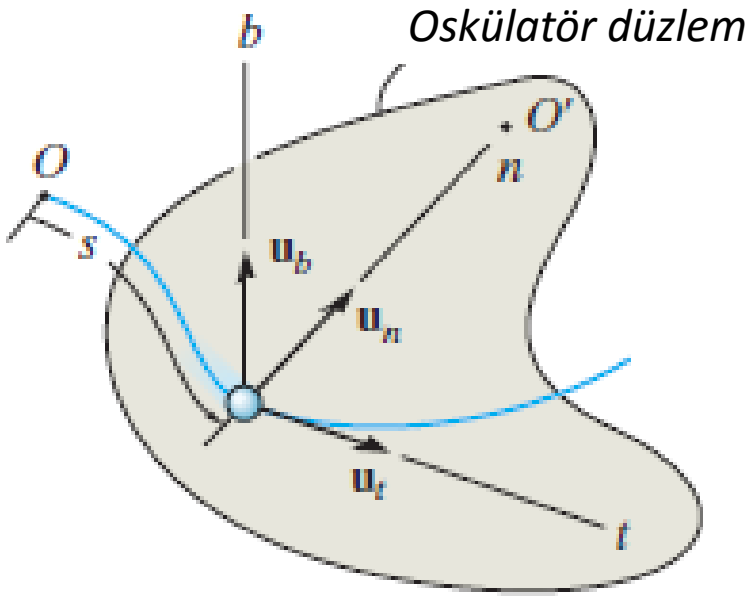
12.6 Eğrisel Hareket: Normal ve Teğetsel Bileşenler

Üç Boyutlu Hareket. Parçacık bir uzay eğrisi boyunca hareket ediyorsa, düzlemsel hareketteki gibi, *P*'den *O'* eğrilik merkezine yönlenen eksen, pozitif *n* ekseni olarak seçilebilir.

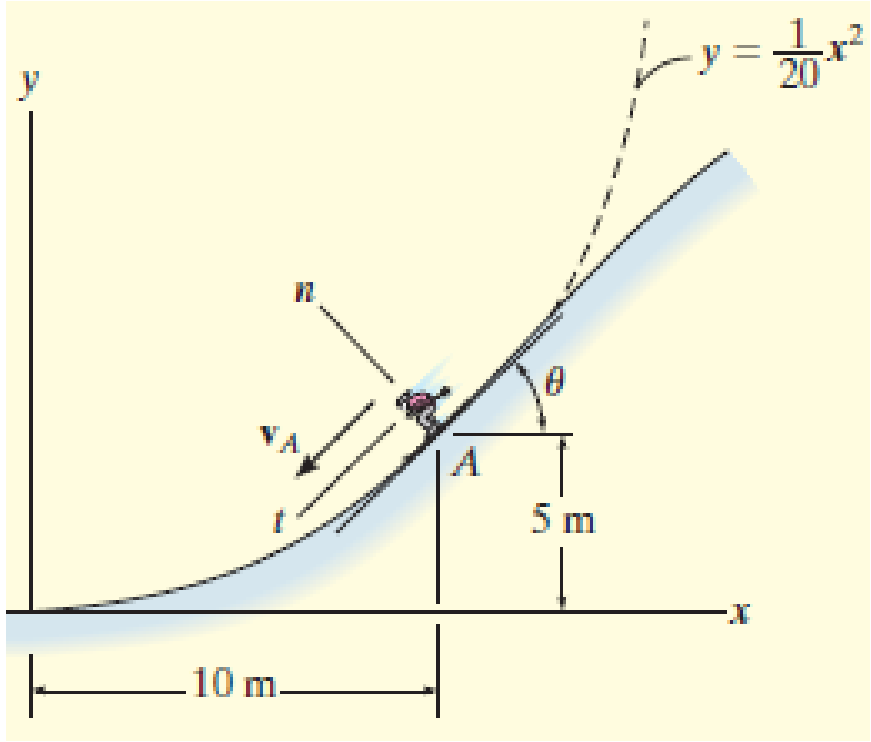
Bu eksene, eğrinin *P*'deki *asal normali* denir.

$\mathbf{u}_t$ ve $\mathbf{u}_n$ daima dik oldukları ve oskülatör düzlemde bulundukları için, $\mathbf{u}_b$, $\mathbf{u}_t$ ve $\mathbf{u}_n$'ye dik olan *b binormal eksenini* tanımlar.

Üç birim vektör birbirine vektörel çarpım ile bağlıdır. Örneğin, $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$.

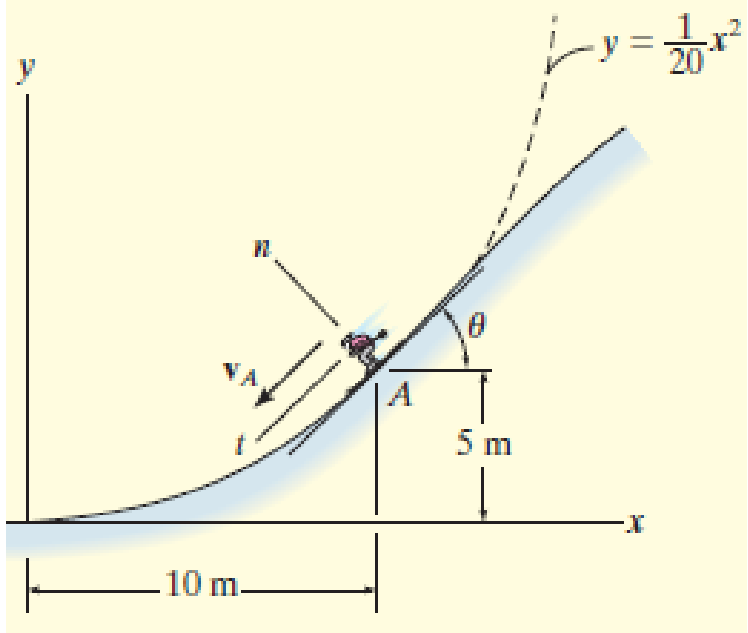


Örnek 12-14



Bir kayakçının, $y = 1/20\ x^2$ parabolik yolu üzerindeki hızı 2 m/s^2 oranında artmaktadır ve A noktasına ulaştığında hızı 6 m/s'dir. Kayakçının *A*'ya ulaştığı andaki hızının doğrultusu ile ivmesinin büyüklüğünü ve doğrultusunu belirleyiniz. Kayakçının boyutlarını ihmal ediniz.

Örnek 12-14



Hız.

$$y = \frac{1}{20}x^2, \quad dy/dx = \frac{1}{10}x, \qquad x = 10\text{ m}, dy/dx = 1.$$

$$\theta = \tan^{-1}1 = 45^\circ \qquad v_A = 6\text{ m/s} \quad 45^\circ$$

İvme.

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n. \qquad A\ (10\text{ m}, 5\text{ m}).\ \text{Since } d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}.$$

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{10}\right|}\right|_{x=10\text{ m}} = 28.28\text{ m}$$

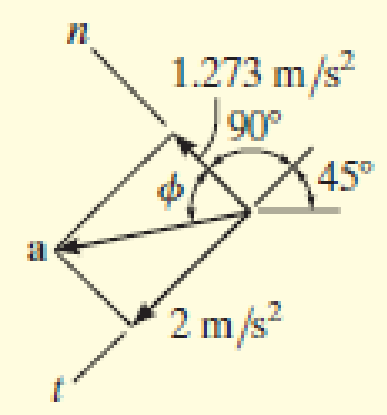
$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$
$$= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6\text{ m/s})^2}{28.28\text{ m}}\mathbf{u}_n$$
$$= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\}\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{(2\text{ m/s}^2)^2 + (1.273\text{ m/s}^2)^2} = 2.37\text{ m/s}^2$$

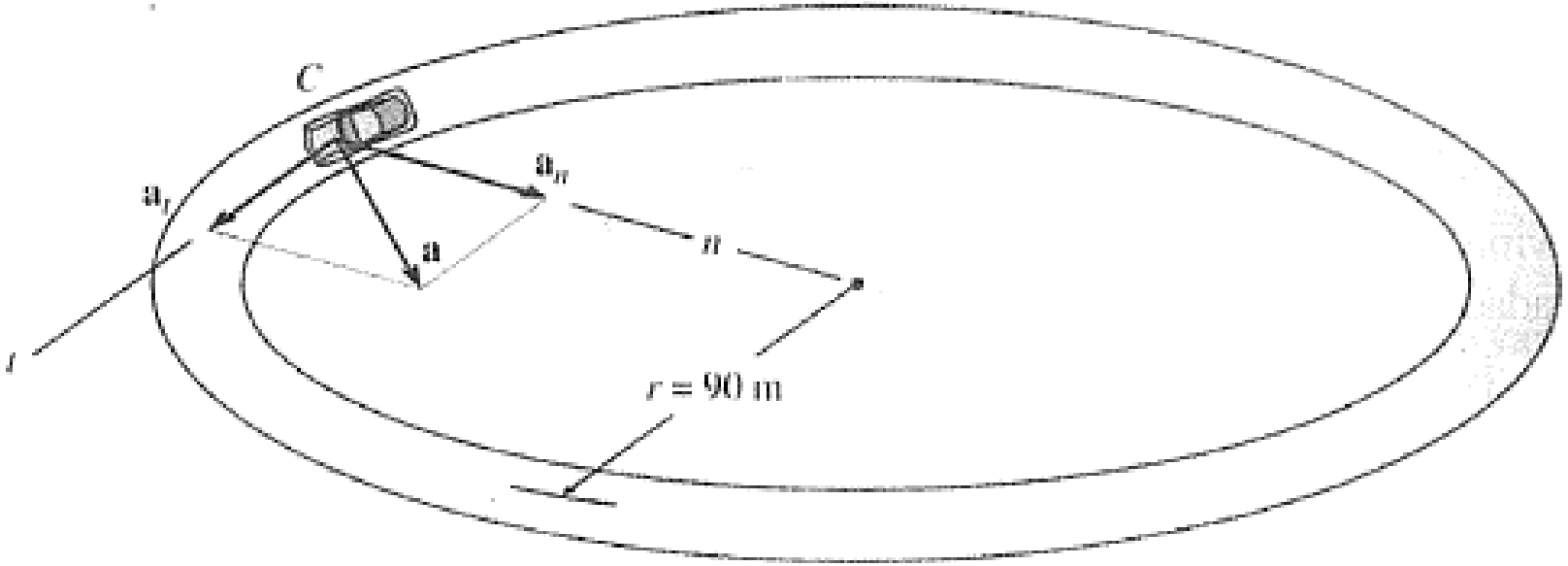
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{1.273} = 57.5^\circ$$

$$45^\circ + 90^\circ + 57.5^\circ - 180^\circ = 12.5^\circ$$

$$a = 2.37\text{ m/s}^2 \qquad 12.5^\circ$$

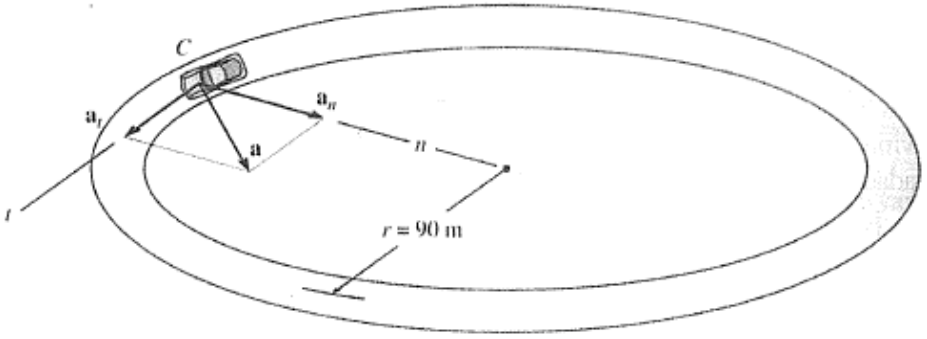


Örnek 12-15



C yarış otomobili, 90 m yarıçaplı yatay dairesel bir pisti dolanmaktadır. Otomobil, durağan halden başlayarak hızını 2.1 m/s^2'lik sabit bir oranda arttırırsa, ivmesinin 2.4 m/s^2'ye ulaşması için gereken zamanı belirleyiniz. Otomobilin o andaki hızı nedir?

Örnek 12-15



İvme.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad a_t = 2.1 \text{ m/s}^2 \qquad \rho = 90 \text{ m}$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 2.1t$$

$$a_n = v^2/\rho$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(2.1t)^2}{90} = 0.049t^2 \text{ m/s}^2$$

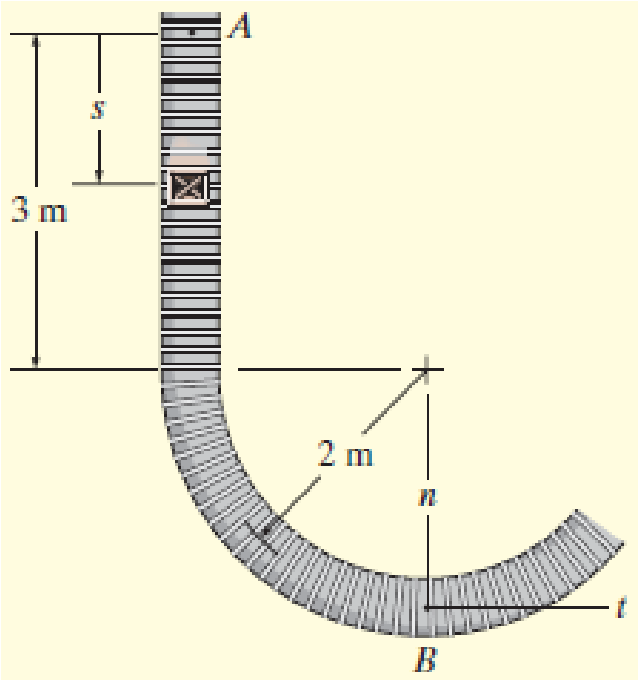
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$2.4 = \sqrt{(2.1)^2 + (0.049t^2)^2}$$

$$0.049t^2 = \sqrt{(2.4)^2 - (2.1)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s}$$

Hız.

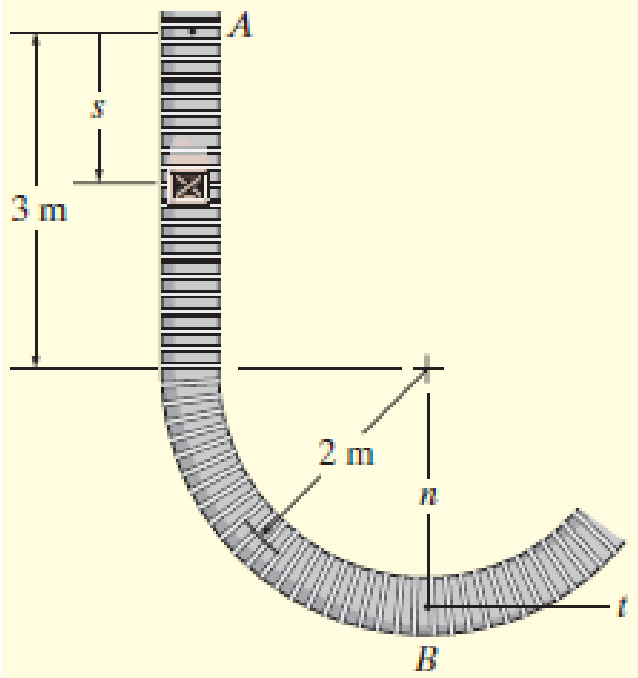
$$t = 4.87 \text{ s} \qquad v = 2.1t = 2.1(4.87) = 10.2 \text{ m/s}$$

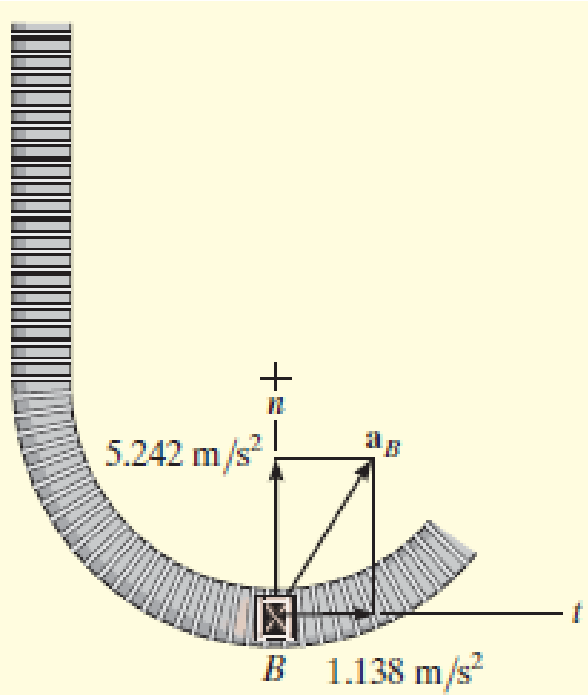
Örnek 12-16



Bir kutu *A* noktasında hızsız harekete başlamakta ve yatay taşıyıcı bant boyunca ilerlemektedir. Hareket esnasında hızdaki artış, *t* saniye cinsinden olmak üzere, $a_t = (0.2t)$ m/s^2'dir. Kutunun *B* noktasına ulaştığı andaki ivmesinin büyüklüğünü belirleyiniz.

Örnek 12-16





İvme.

$a_t = \dot{v}$ $\quad a_n = v^2/\rho$ $\quad v_A = 0$ when $t = 0$,

$$a_t = \dot{v} = 0.2t$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\, dt$$

$$v = 0.1t^2$$

$$s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142 \text{ m},$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142\text{ m}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 dt$$

$$6.142 \text{ m} = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690\text{s}$$

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238 \text{ m/s}$$

At B, $\rho_B = 2$ m,

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}} = 5.242 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(1.138 \text{ m/s}^2)^2 + (5.242 \text{ m/s}^2)^2} = 5.36 \text{ m/s}^2$$

12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

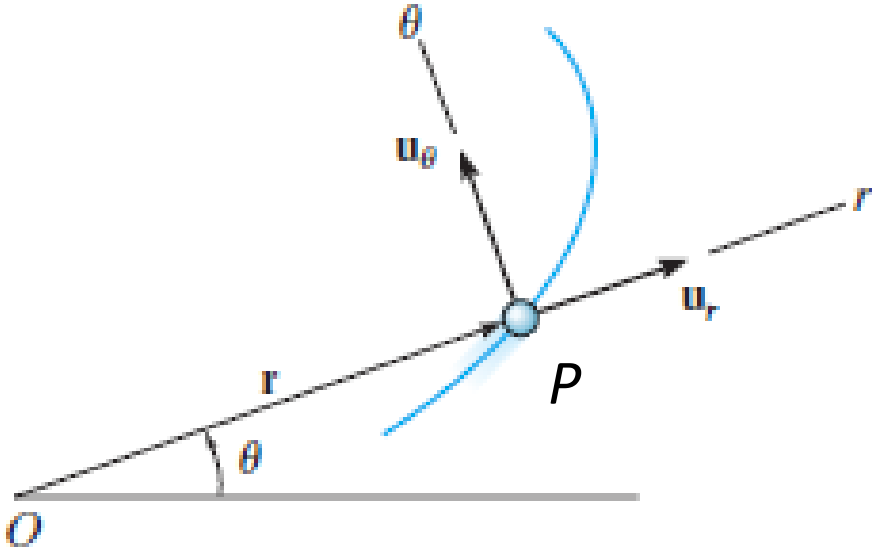
Bazı mühendislik problemlerinde, bir parçacığın yörüngesini *r*, θ ve *z* **silindirik koordinatları** cinsinden ifade etmek uygundur. Hareket düzleme kısıtlanmışsa, *r*, θ **kutupsal (polar) koordinatları** kullanılır.

Kutupsal Koordinatlar. Parçacığın konumu, *r* radyal koordinatı ve θ enine koordinatı ile belirlenebilir.

r ve θ koordinatlarının pozitif doğrultuları, sırasıyla, $\mathbf{u}_r$ ve $\mathbf{u}_\theta$ ile tanımlanır. Bu doğrultular birbirine *diktir*.

Konum. Herhangi bir anda parçacığın konumu:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$



Konum

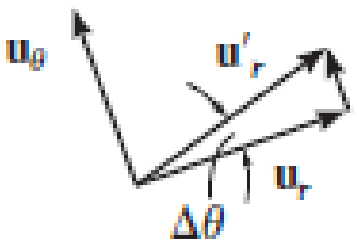
12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

Hız. v anlık hızı, **r**'nin zamana göre türevi alınarak elde edilir:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) \mathbf{u}_\theta$$



$$\Delta u_r \approx 1(\Delta\theta)$$

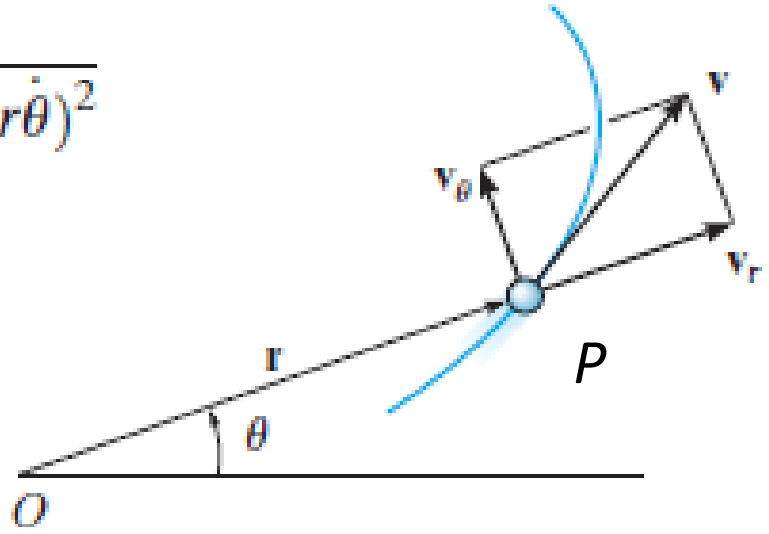
$$\Delta \mathbf{u}_r = \Delta\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\boxed{\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}}$$

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$



$\dot{\theta} = d\theta/dt$ terimine açısal hız denir, çünkü θ açısının zamana bağlı değişiminin ölçüsüdür. Genellikle rad/s birimi kullanılır.

12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

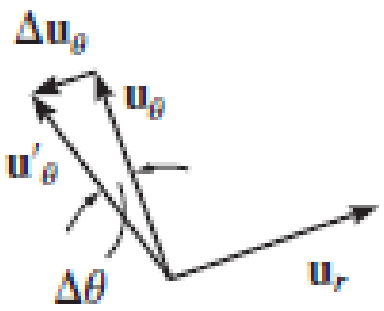
İvme.

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta \qquad \Delta u_\theta \approx 1(\Delta\theta) \qquad \Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta\theta\mathbf{u}_r$$

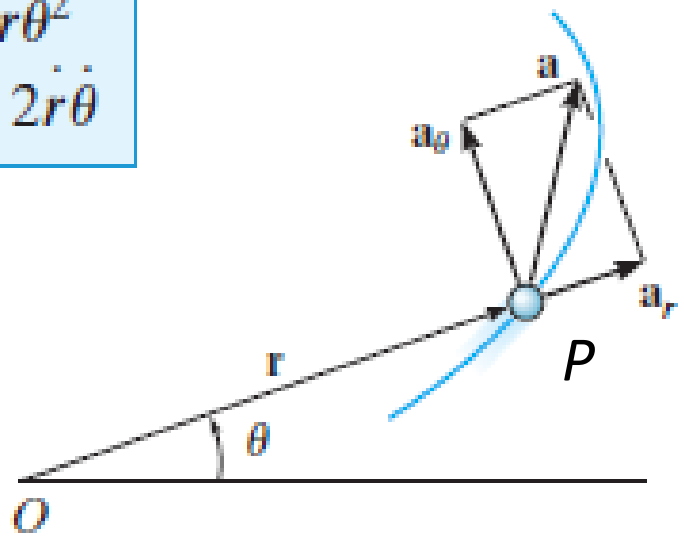


$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$



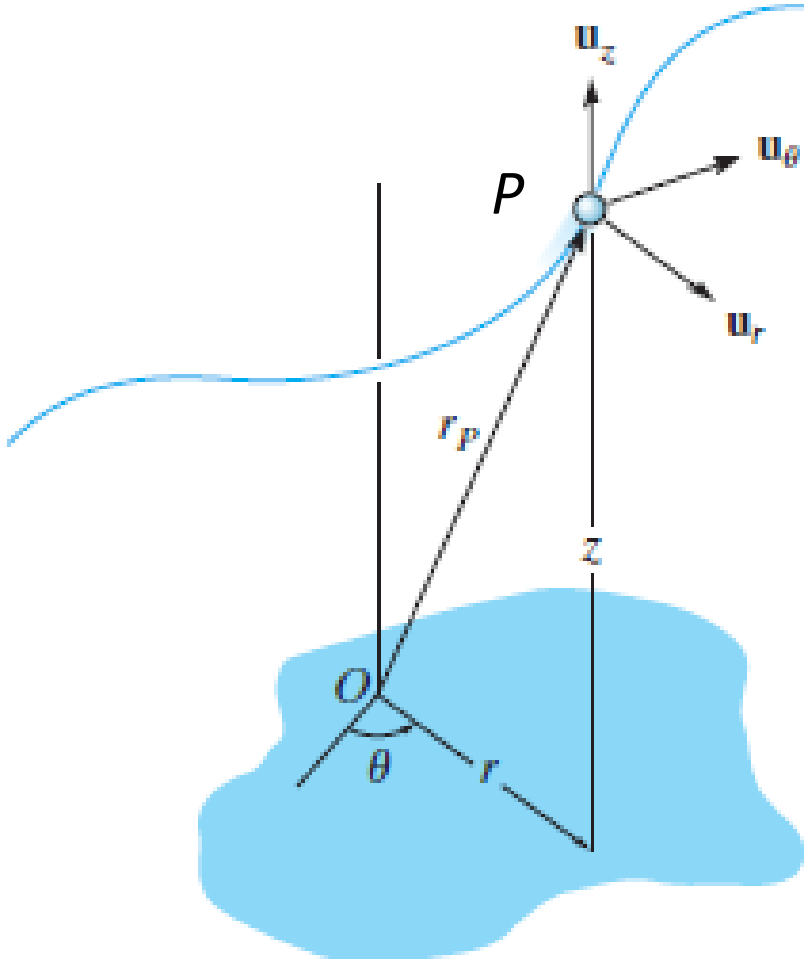
İvme

$\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ terimine açısal ivme denir, çünkü belli bir zaman aralığında açısal hızın değişiminin ölçüsüdür. Genellikle rad/s^2 birimi kullanılır. $a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$

12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

Silindirik Koordinatlar.

Parçacık bir uzay eğrisi boyunca hareket ediyorsa, konumu *r*, θ, *z* silindirik koordinatları ile belirlenebilir. Parçacığın konum, hız ve ivmesi silindirik koordinatlar cinsinden:



$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$

12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

Zamana Göre Türevler.

Kinematik denklemler, **v** ve **a**'nın *r* ve θ bileşenlerini hesaplamak için zamana göre $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ türevlerini bulmamızı gerektirir.

1. Koordinatlar zaman parametreli $r = r(t)$ ve $\theta = \theta(t)$ denklemleri ile belirlenirse, zamana göre türevler doğrudan bulunabilir.

$$r = 4t^2 \qquad \theta = (8t^3 + 6)$$

$$\dot{r} = 8t \qquad \dot{\theta} = 24\,t^2$$

$$\ddot{r} = 8 \qquad \ddot{\theta} = 48\,t$$

12.7 Eğrisel Hareket: Silindirik Bileşenler

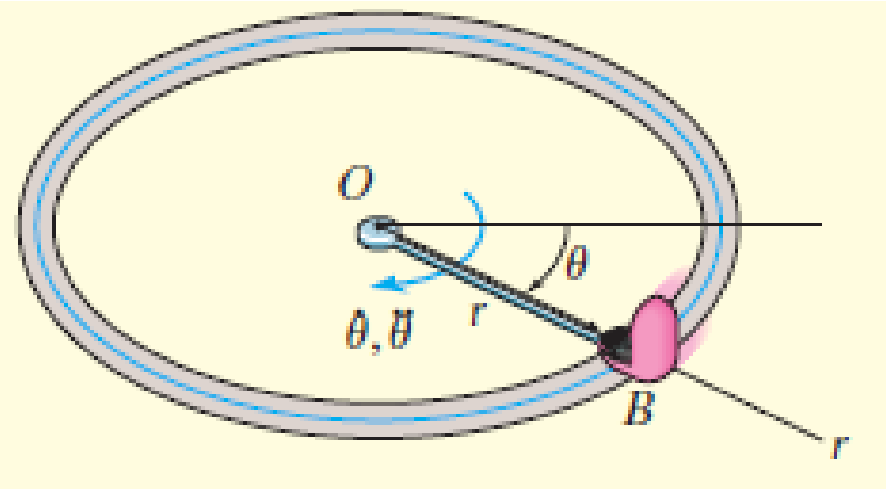
Zamana Göre Türevler.

2. Zaman parametreli denklemler verilmiyorsa, $r = f(\theta)$ yörüngesini belirlemek ve kalkülüsün zincir kuralı kullanılarak zamana göre türevler arasındaki bağıntıyı bulmak gerekir.

$$r = 5\theta^2$$
$$\dot{r} = 10\theta\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})]$$
$$= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta}$$

$$r^2 = 6\theta^3$$
$$2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta}$$
$$2[(\dot{r})\dot{r} + r(\ddot{r})] = 18[(2\theta\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta^2(\ddot{\theta})]$$
$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = 9(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta})$$

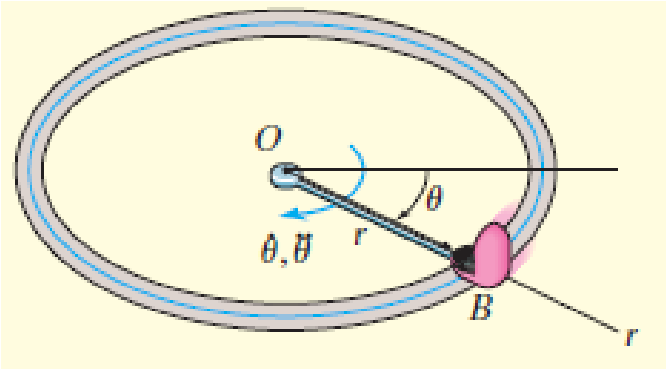
Örnek 12-17



Şekildeki lunapark aleti, *r* yarıçaplı yatay dairesel yörünge üzerinde dönen bir koltuktan oluşur ve *OB* kolu, $\dot{\theta}$ açısal hızına ve $\ddot{\theta}$ açısal ivmesine sahiptir. Koltuktaki kişinin hızının ve ivmesinin radyal ve enine bileşenlerini belirleyiniz. Boyutları ihmal ediniz.

Örnek 12-17

Hız ve İvme.

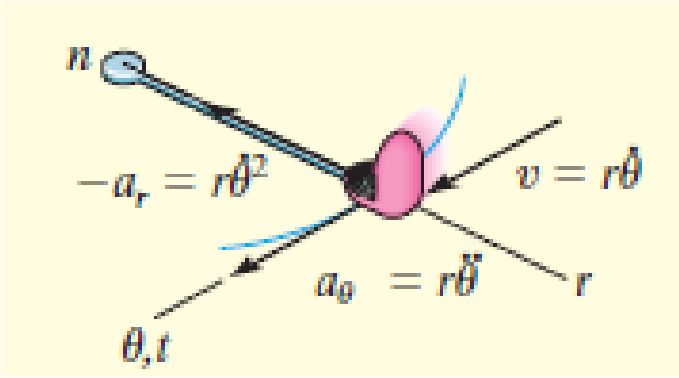


$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

$$v_r = \dot{r} = 0$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$$

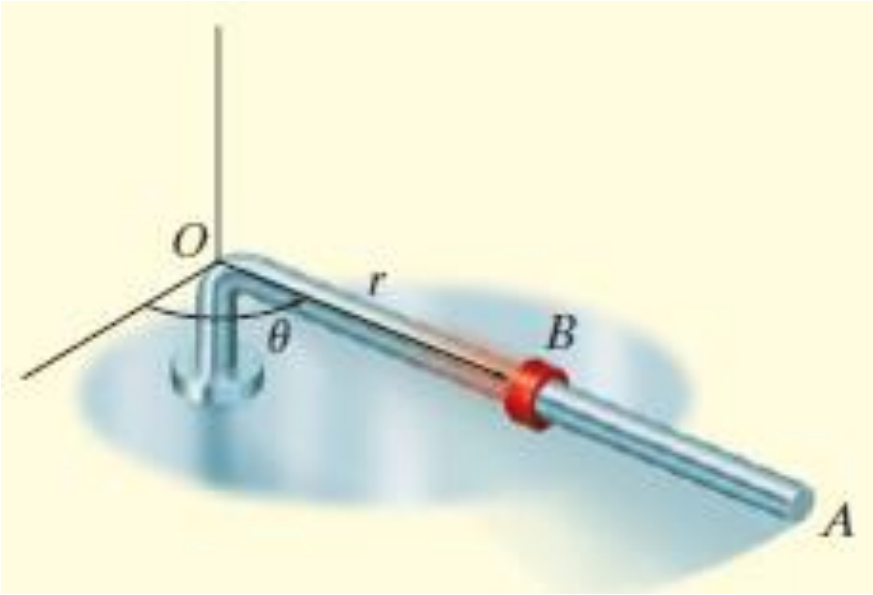


$$v = v_\theta = v_t = r\dot{\theta},$$

$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

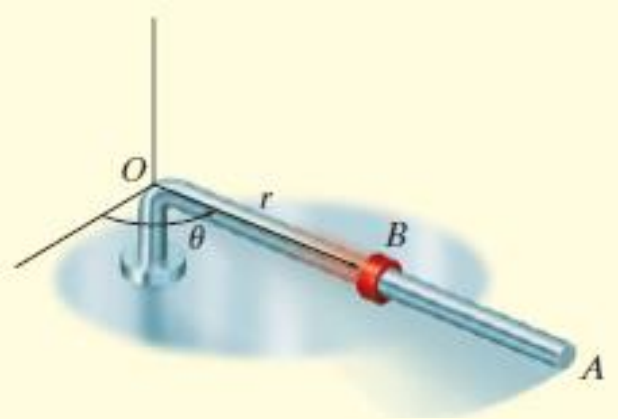
$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

Örnek 12-18



OA çubuğu, θ = (t^3) rad olacak şekilde yatay düzlemde dönmektedir. Aynı zamanda, *B* bileziği, *r* = (100t^2) mm olmak üzere, *OA* boyunca dışarıya doğru kaymaktadır. Her iki denklemde *t* saniye cinsinden olduğuna göre, *t* = 1 s iken bileziğin hız ve ivmesini belirleyiniz.

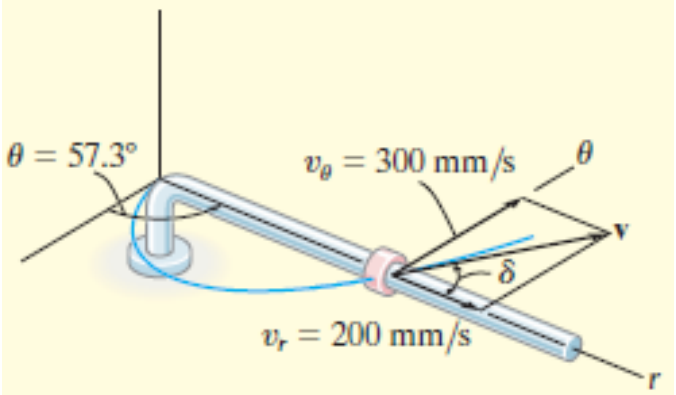
Örnek 12-18 *Hız ve İvme.*



$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,s} = 100\,\text{mm} \qquad \theta = t^3\Big|_{t=1\,s} = 1\ \text{rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,s} = 200\ \text{mm/s} \qquad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,s} = 3\ \text{rad/s}$$

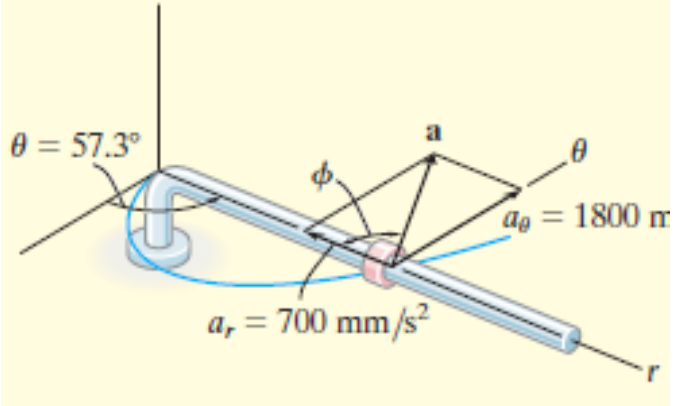
$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,s} = 200\ \text{mm/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,s} = 6\ \text{rad/s}^2.$$



$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}$$

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\ \text{mm/s}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \qquad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ$$

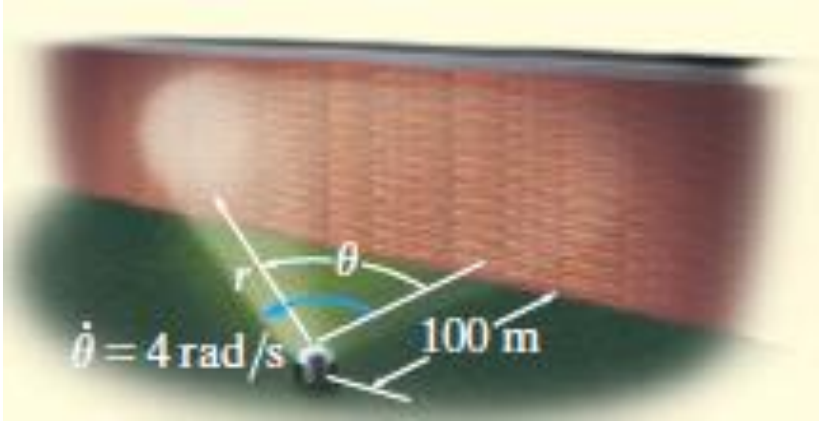


$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}^2$$

$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930\ \text{mm/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \qquad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ$$

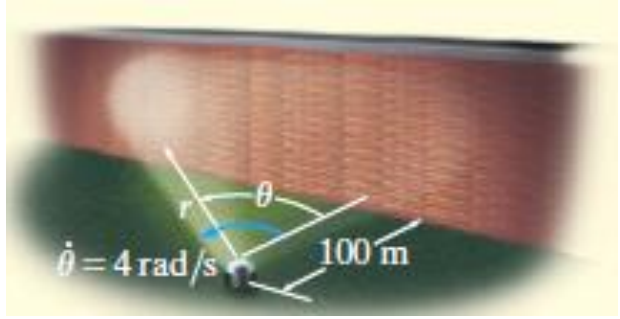
Örnek 12-19



Şekildeki projektör, 100 m uzaktaki duvar yüzeyine bir ışık demeti göndermektedir. θ = 45˚ iken ışık demetinin duvar üzerindeki hareketinin hızının ve ivmesinin büyüklüğünü hesaplayınız.

Projektör sabit $\dot{\theta}$ = 4 rad/s hızıyla dönmektedir.

Örnek 12-19

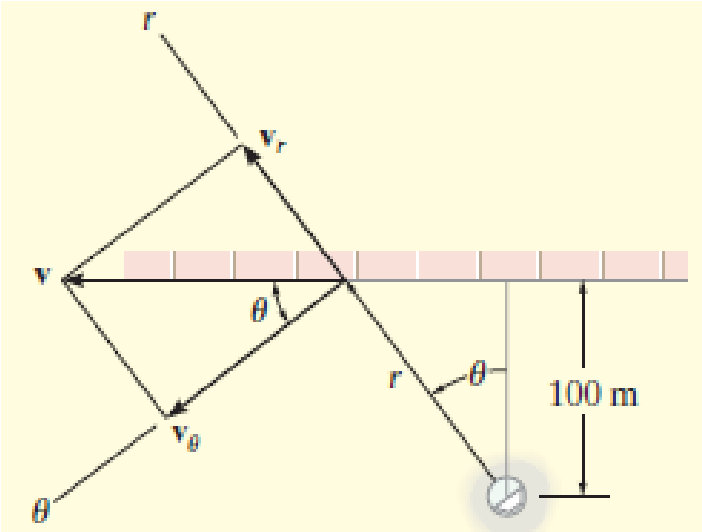


Hız ve İvme.

$$r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$$

$$d(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$d(\tan\theta) = \sec^2\theta\, d\theta$$



$$\dot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})$$

$$= 100\sec\theta\tan^2\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = 4\text{ rad/s} = \text{constant, then } \ddot{\theta} = 0, \qquad \theta = 45°,$$

$$r = 100\sec 45° = 141.4$$

$$\dot{r} = 400\sec 45°\tan 45° = 565.7$$

$$\ddot{r} = 1600\,(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

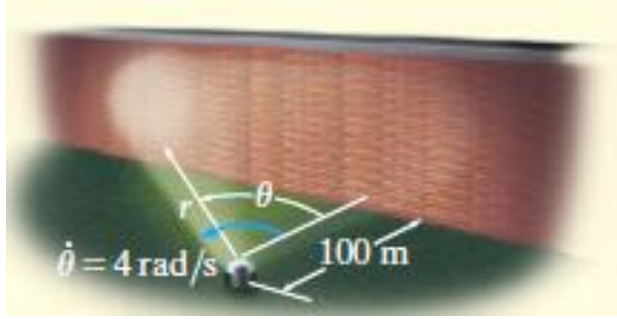
$$= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta\}\text{ m/s}$$

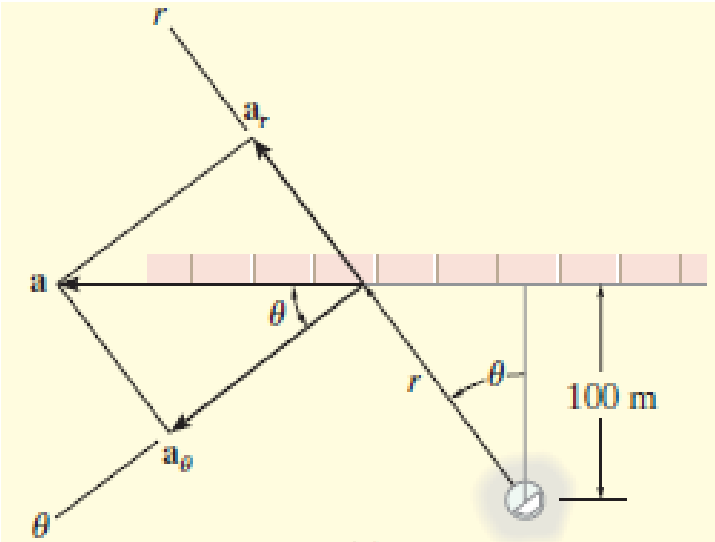
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}$$

$$= 800\text{ m/s}$$

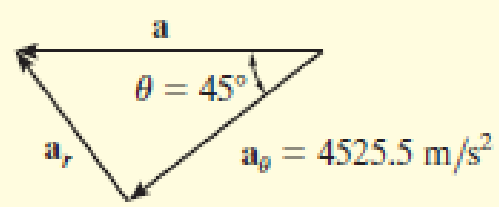
Örnek 12-19



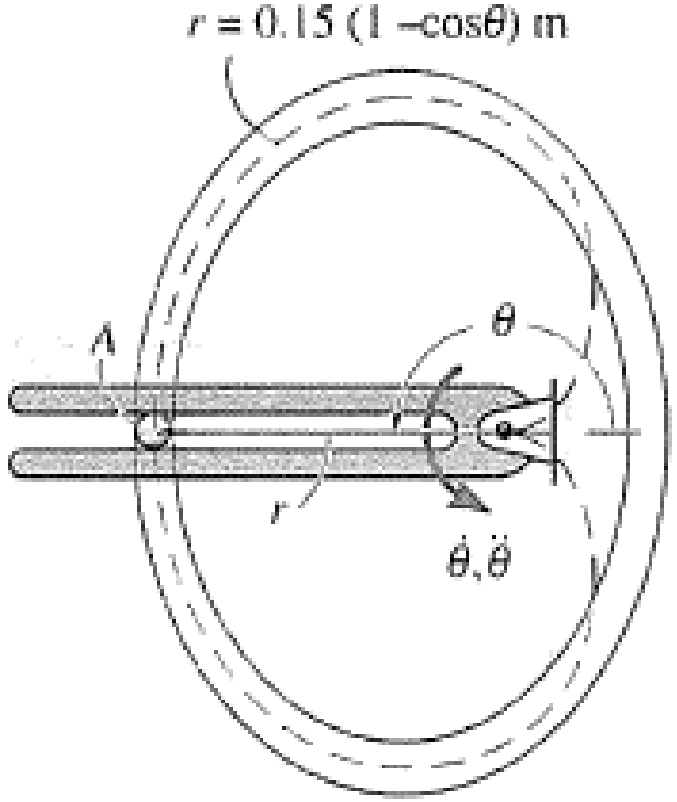
Hız ve İvme.



$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\
&= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta \\
&= \{4525.5\mathbf{u}_r + 4525.5\mathbf{u}_\theta\}\ \mathrm{m/s^2} \\
a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2} \\
&= 6400\ \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

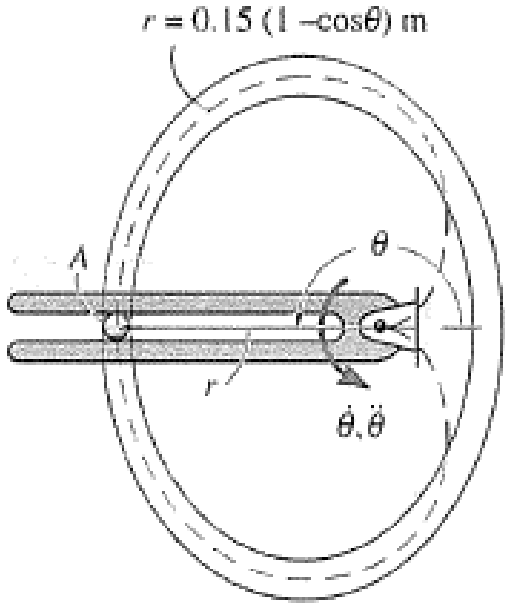


Örnek 12-20



Şekildeki silindirik çivi, çatal çubuğun dönmesi sonucu, bir parçası r = 0.15(1-cosθ) m denklemli kardiyoid şeklinde olan oluklu yol etrafında ilerlemektedir. Burada θ radyan cinsindendir. Çivinin, θ = 180˚ anındaki hızı v = 1.2 m/s ve ivmesi a = 9 m/s2 olduğuna göre, çatalın $\dot{\theta}$ açısal hızını ve $\ddot{\theta}$ açısal ivmesini belirleyiniz.

Örnek 12-20



Hız ve İvme.

$$r = 0.15\,(1 - \cos\,\theta)$$

$$\dot{r} = 0.15\,(\sin\,\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 0.15\,(\cos\,\theta)\dot{\theta}\,(\dot{\theta}) + 0.15\,(\sin\,\theta)\ddot{\theta}$$

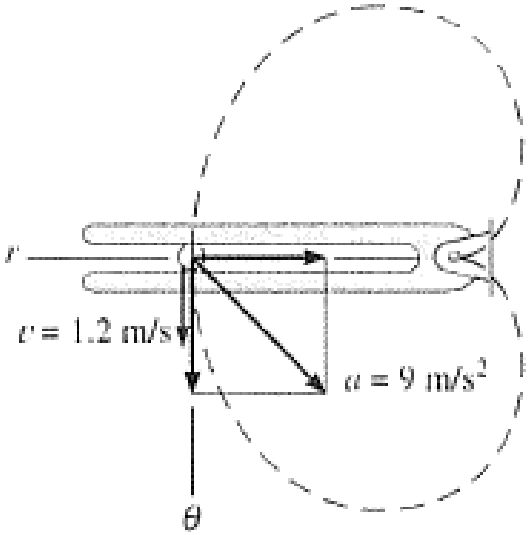
$\theta = 180^\circ$ $\quad r = 0.3$ m $\quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = -0.15\dot{\theta}^2$

$$v = \sqrt{(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$v = 1.2$ m/s

$$1.2 = \sqrt{(0)^2 + (0.3\dot{\theta})^2}$$

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$



$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

$$9 = \sqrt{[-0.15(4)^2 - 0.3\,(4)^2]^2 + [0.3\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$

$$(9)^2 = (-7.2)^2 + (0.3\ddot{\theta})^2$$

$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad)s}^2$$

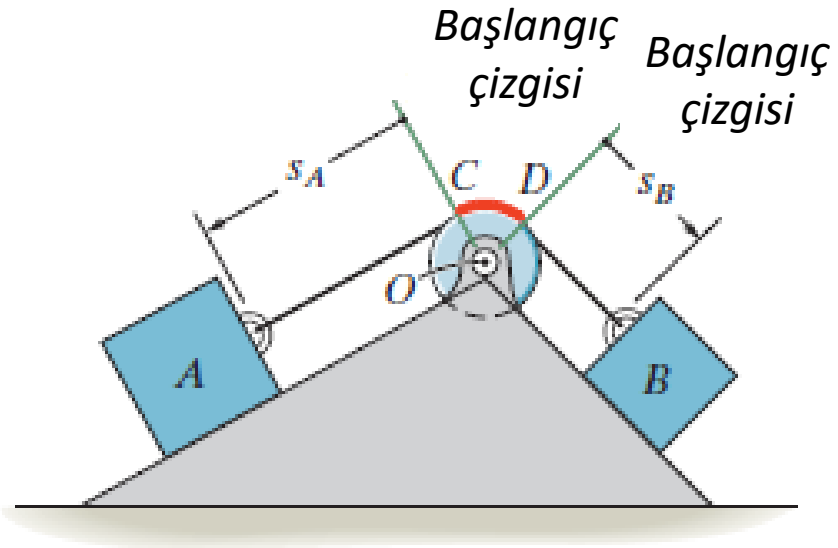
12.8 İki Parçacığın Mutlak Bağımlı Hareket Analizi

Bazı problem tiplerinde, bir parçacığın hareketi bir başka parçacığın karşı gelen hareketine *bağımlı* olur. Bu bağımlılık, genellikle parçacıkların makaralardan dolandırılmış uzamayan iplerle birbirine bağlanması durumunda ortaya çıkar.

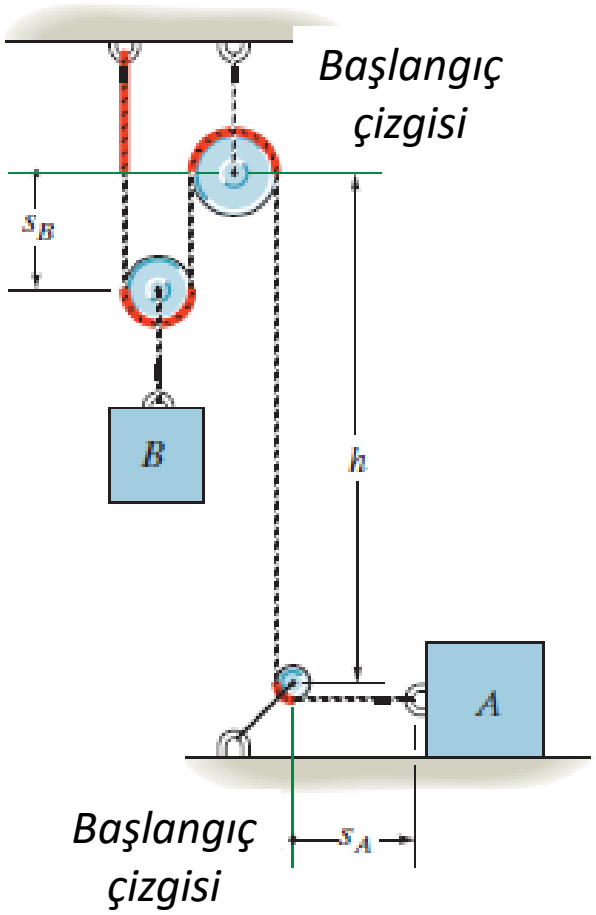
$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \qquad v_B = -v_A$$

$$a_B = -a_A$$

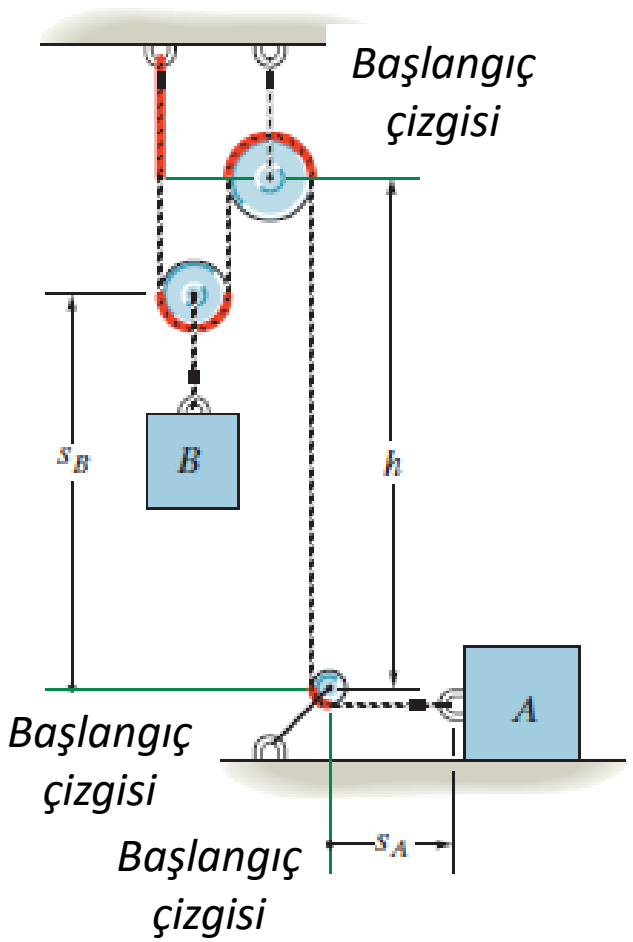


12.8 İki Parçacığın Mutlak Bağımlı Hareket Analizi



$$2s_B + h + s_A = l$$

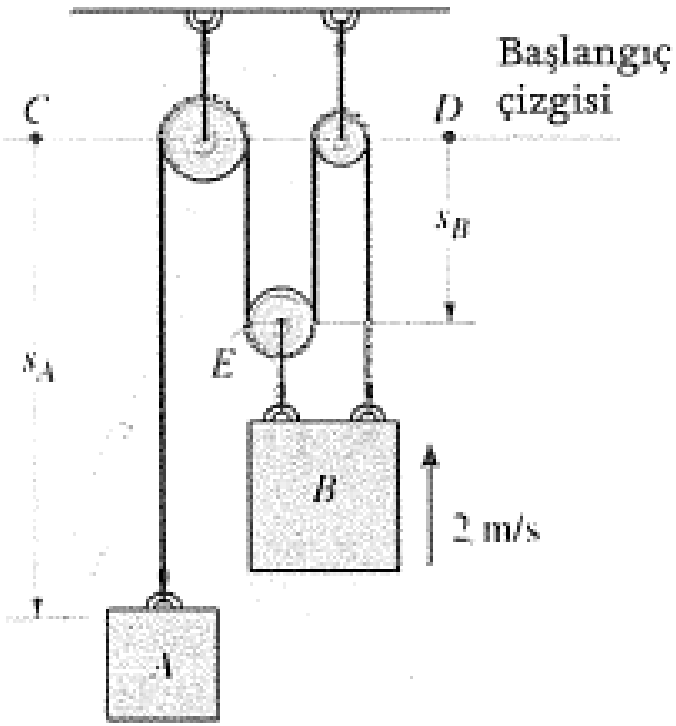
$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$



$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

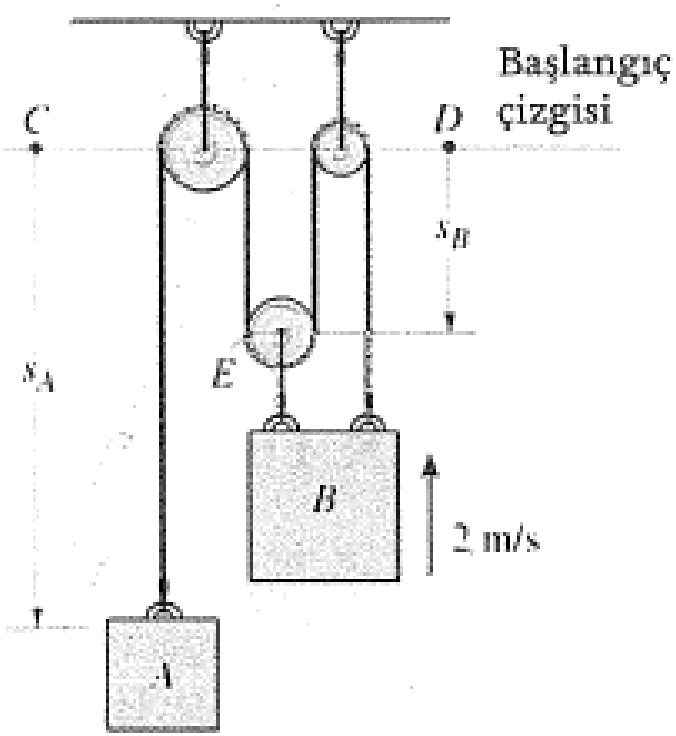
$$2v_B = v_A \qquad 2a_B = a_A$$

Örnek 12-21



Şekildeki *B* bloğu yukarıya doğru sabit 2 m/s hızına sahip olduğuna göre, *A* bloğunun hızını belirleyiniz.

Örnek 12-21

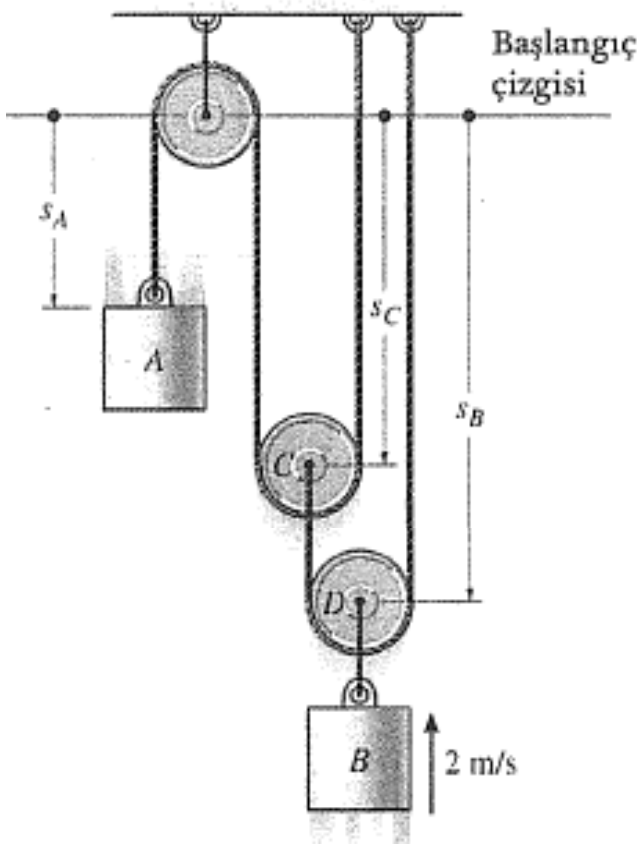


$$s_A + 3s_B = l$$

$$v_A + 3v_B = 0$$

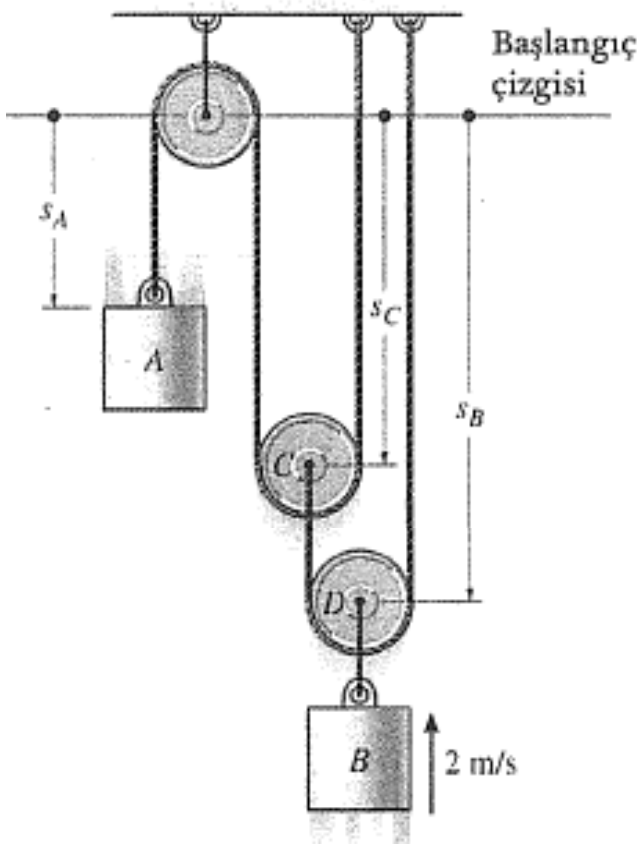
$$v_B = -2 \text{ m/s} \qquad v_A = 6 \text{ m/s} \downarrow$$

Örnek 12-22



Şekildeki *B* bloğu yukarıya doğru sabit 2 m/s hızına sahip olduğuna göre, *A* bloğunun hızını belirleyiniz.

Örnek 12-22



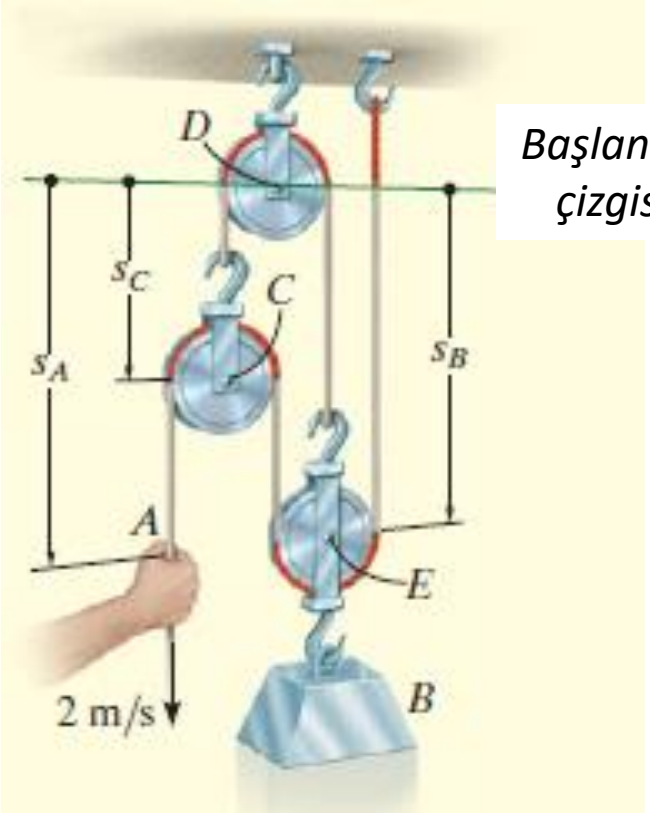
$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

$$s_A + 4s_B = 2l_2 + l_1$$

$$v_A + 4v_B = 0$$

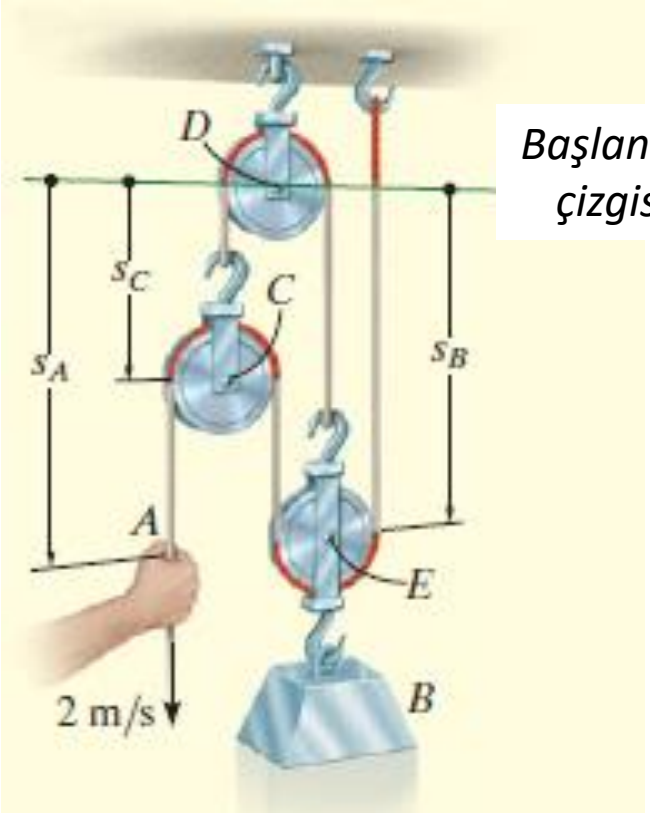
$$v_B = -2 \text{ m/s} \qquad v_A = +8 \text{ m/s} = 8 \text{ m/s} \downarrow$$

Örnek 12-23



İpin *A*'daki ucu 2 m/s hızla çekiliyorsa, *B* bloğunun yükselme hızını belirleyiniz.

Örnek 12-23



Başlangıç çizgisi

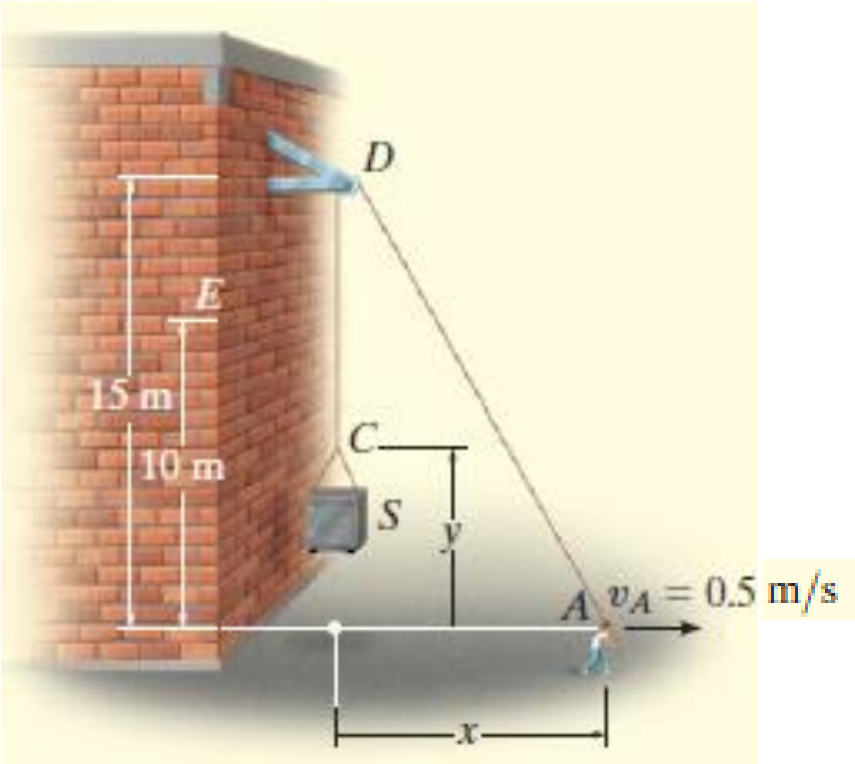
$$s_C + s_B = l_1$$
$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

$$v_C + v_B = 0$$
$$v_A - 2v_C + 2v_B = 0$$

$$v_A + 4v_B = 0$$

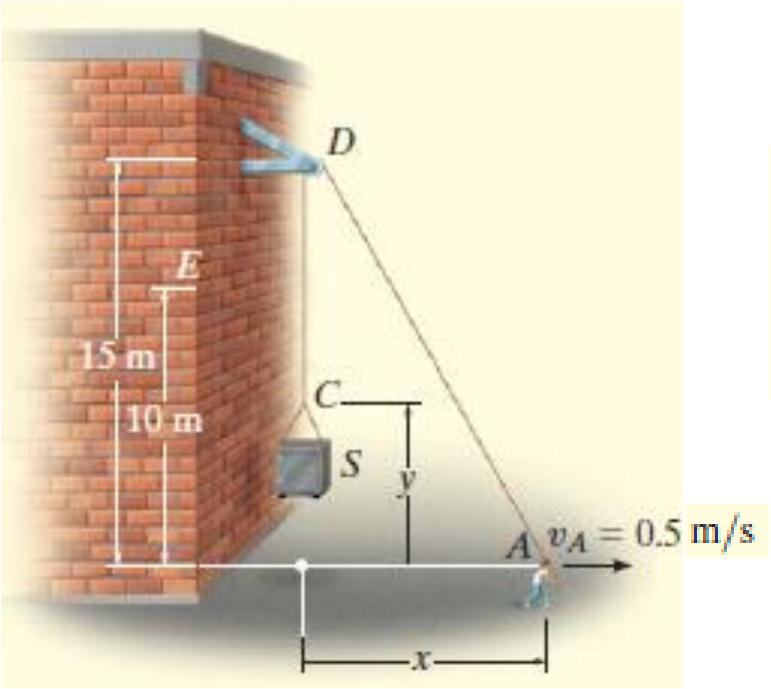
$$v_A = 2 \text{ m/s} \qquad v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow$$

Örnek 12-24



A'daki adam v_A = 0.5 m/s sabit hızıyla sağa doğru yürüyerek bir *S* kasasını yukarı çekmektedir. Kasanın *E*'deki pencere seviyesine geldiği andaki hızını ve ivmesini belirleyiniz. İpin uzunluğu 30 m'dir ve *D*'deki küçük bir makaranın üzerinden geçmektedir.

Örnek 12-24



$$l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2} \qquad l_{CD} = 15 - y$$

$$l = l_{DA} + l_{CD}$$

$$30 = \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y)$$

$$y = \sqrt{225 + x^2} - 15$$

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}} v_A$$

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4\text{m/s} = 400\,\text{mm/s} \uparrow$$

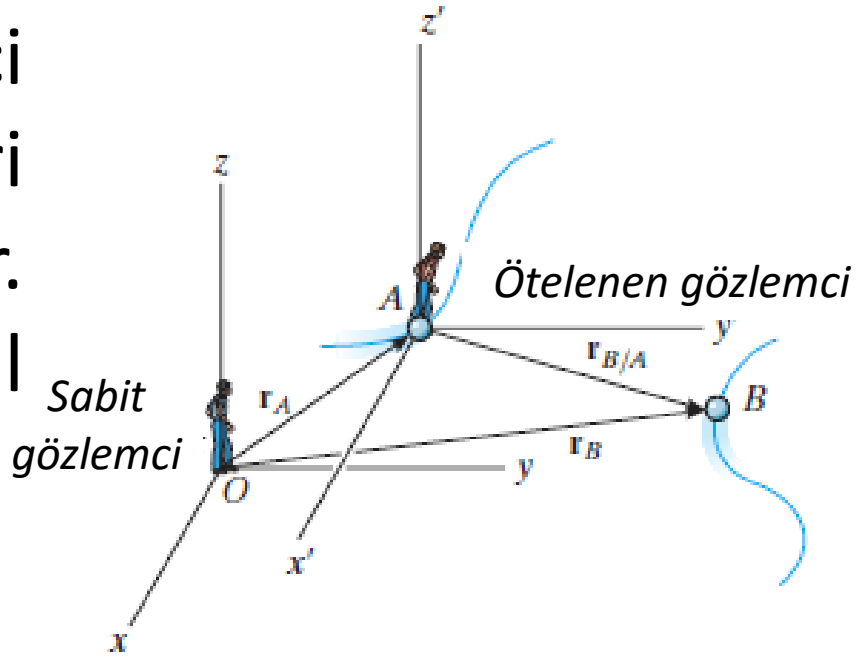
$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

$$a_S = \frac{225(0.5\text{ m/s})^2}{[225 + (20\text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360\text{ m/s}^2 = 3.60\text{ mm/s}^2 \uparrow$$

12.9 İki Parçacığın Bağıl Hareketinin Ötelenen Eksenler ile Analizi

Bir çok durumda, parçacığın hareketinin yörüngesi çok karmaşıktır ve iki veya daha fazla referans sistemi kullanarak, hareketi kısımlara ayırıp analiz etmek daha uygun olabilir.

Konum. $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ mutlak konumları sabit referans sisteminin orijininden ölçülür. İkinci referans sistemi *A*'ya bağlıdır. Eksenleri dönmez, sabit sisteme göre sadece ötelenir. «*B*'nin *A*'ya göre» *bağıl konumu* $\mathbf{r}_{B/A}$ bağıl konum vektörü yardımıyla gösterilir.



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

12.9 İki Parçacığın Bağıl Hareketinin Ötelenen Eksenler ile Analizi

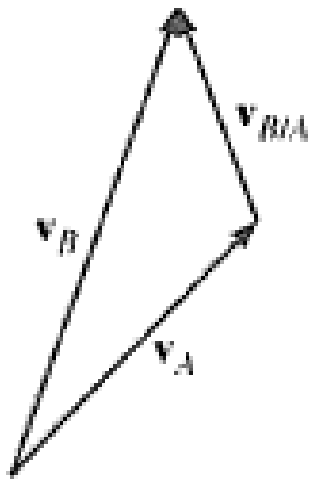
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Hız.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

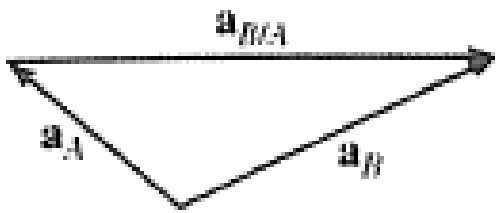
$$\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt \qquad \mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$$

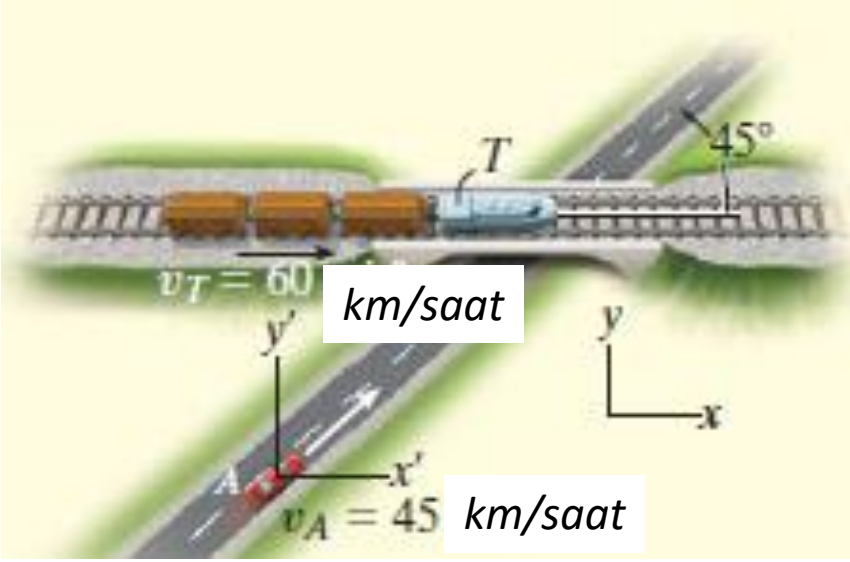


İvme.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



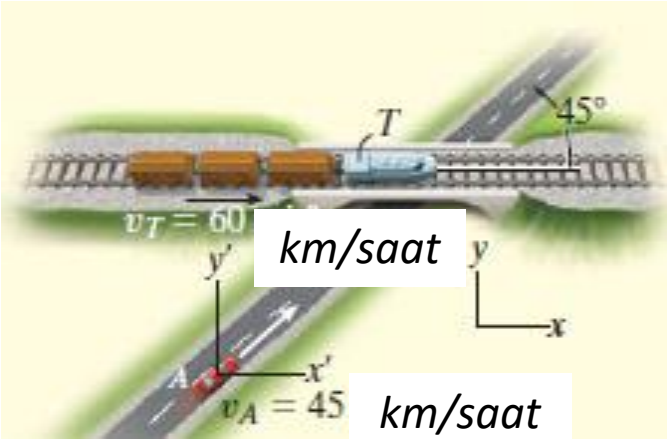
Örnek 12-25



60 km/saat'lik sabit bir hızla giden bir tren şekildeki gibi bir yol üzerinden geçiyor. *A* otomobili 45 km/saat hızla yol boyunca ilerlediğine göre, trenin otomobile göre bağıl hızını belirleyiniz.

Örnek 12-25

Çözüm I. *Vektör Analizi.*

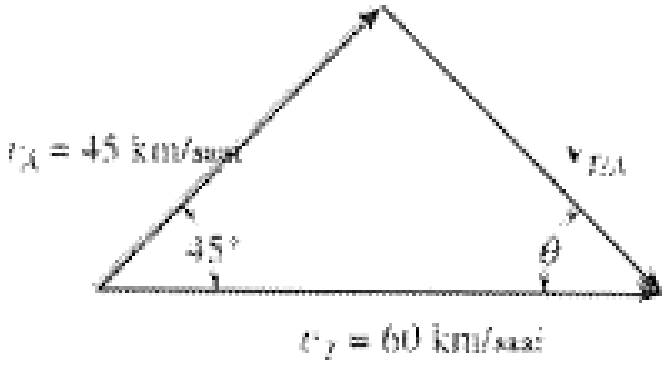


$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$60\mathbf{i} = (45 \cos 45°\, i + 45 \sin 45°\, \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ km/saat}$$

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ km/saat}$$

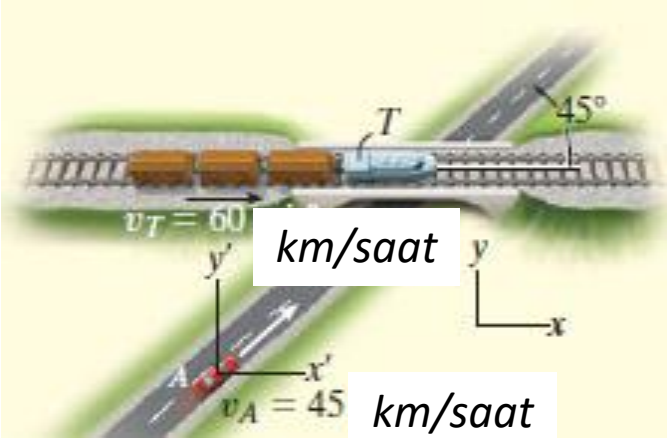


$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.4°$$

Örnek 12-25

Çözüm II. *Skaler Analiz.*



$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60 \text{ km/saat} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \text{ km/saat} \\ 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

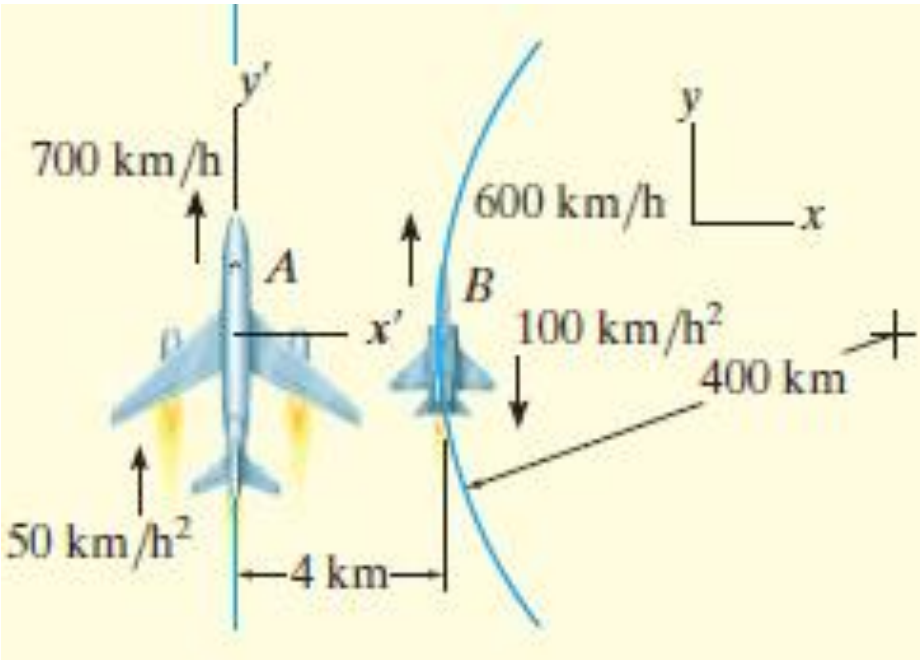
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 60 = 45 \cos 45° + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = 45 \sin 45° + 0\ (v_{T/A})_y$$

$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ km/saat} = 28.2 \text{ km/saat} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ km/saat} = 31.8 \text{ km/saat} \downarrow$$

Örnek 12-26



İki uçak aynı yükseklikte uçmakta ve şekilde gösterilen hareketi yapmaktadırlar. *A* uçağı düz bir yol boyunca buna karşı *B* uçağı ρ_B = 400 km yarıçaplı bir dairesel yol boyunca uçuyor. *B*'nin *A* pilotu tarafından ölçülen hız ve ivmesini belirleyiniz.

Örnek 12-26

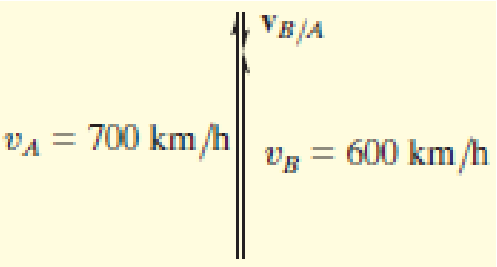
Hız.

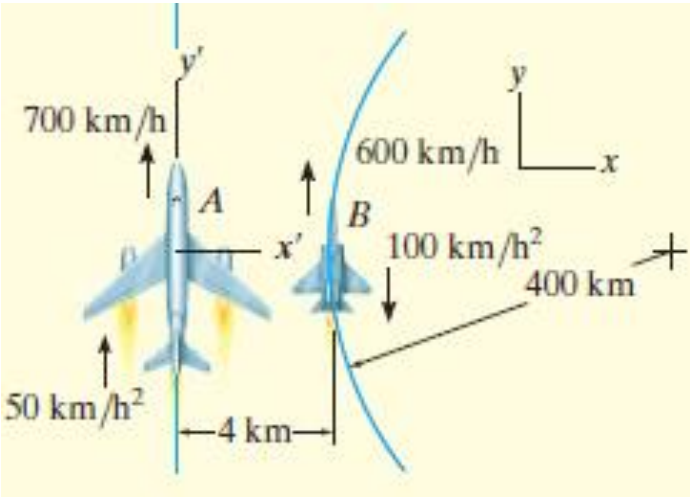
$(+\uparrow)$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$600\ \text{km/h} = 700\ \text{km/h} + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = -100\ \text{km/h} = 100\ \text{km/h} \downarrow$$





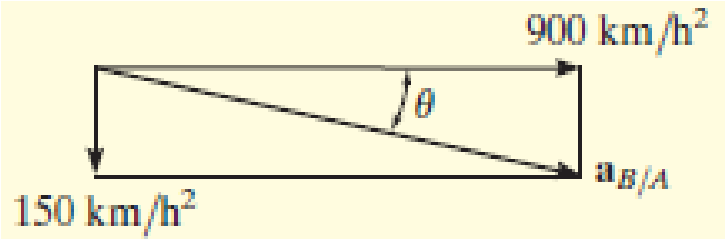
İvme.

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600\ \text{km/h})^2}{400\ \text{km}} = 900\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

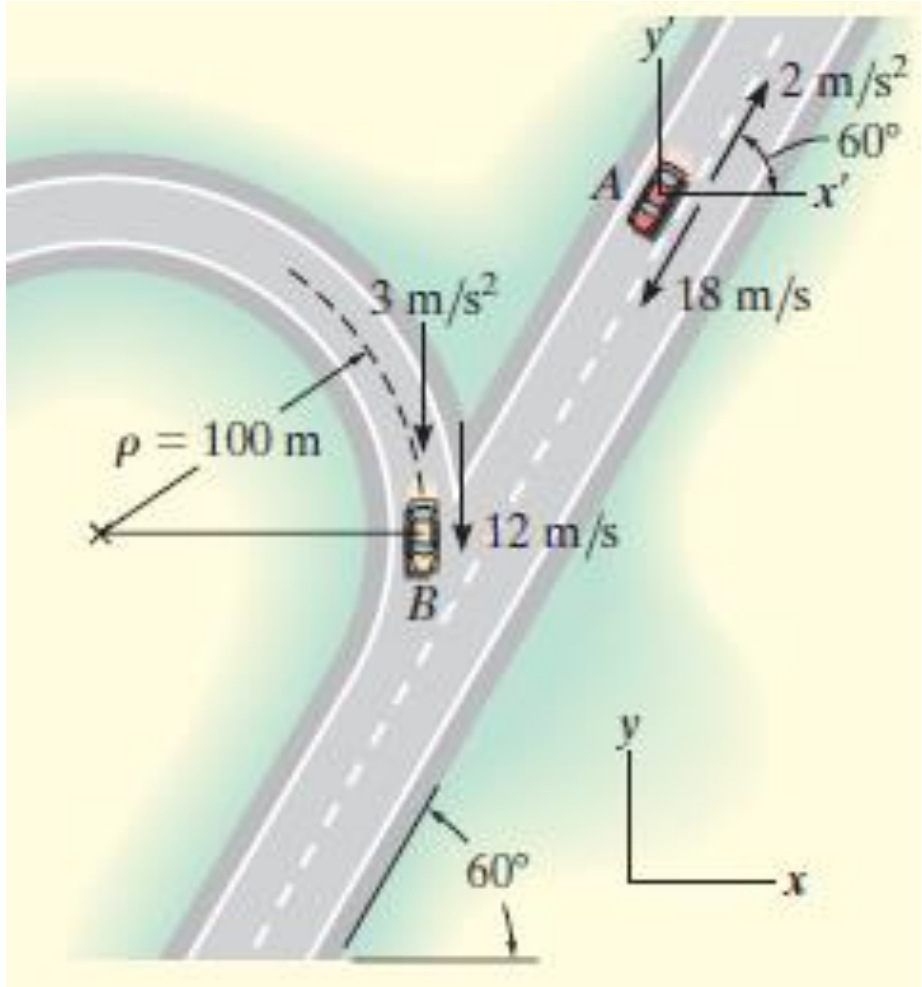
$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$



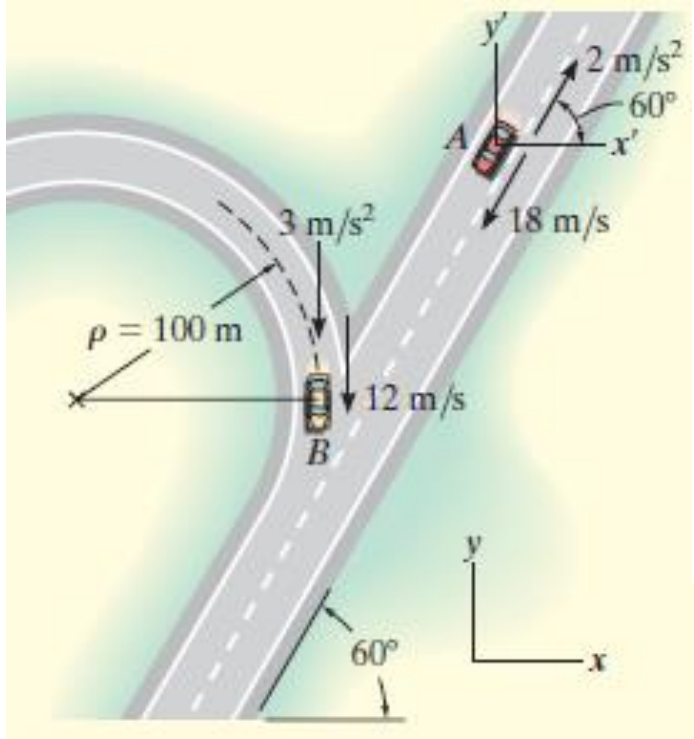
$$a_{B/A} = 912\ \text{km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46^\circ \quad \nwarrow$$

Örnek 12-27



Gösterilen anda *A* ve *B* arabaları sırasıyla 18 m/s ve 12 m/s hızlarıyla ilerlemektedir. Ayrıca bu anda, *A* 2 m/s^2 ile yavaşlamakta, *B* 3 m/s^2 ile hızlanmaktadır. *B*'nin *A*'ya göre hız ve ivmesini belirleyiniz.

Örnek 12-27

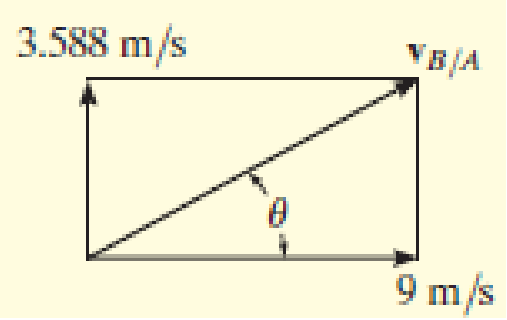


Hız.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$-12\mathbf{j} = (-18\cos 60°\mathbf{i} - 18\sin 60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$



$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69\ \text{m/s}$$

$$\tan\theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9}$$

$$\theta = 21.7° \quad \measuredangle$$

İvme.

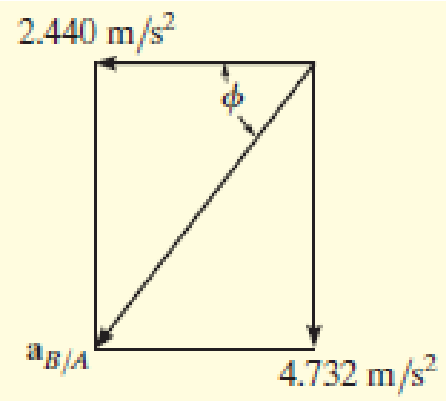
$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{100\ \text{m}} = 1.440\ \text{m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$(-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2\cos 60°\mathbf{i} + 2\sin 60°\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32\ \text{m/s}^2$$

$$\tan\phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$

$$\phi = 62.7° \quad \measuredangle$$