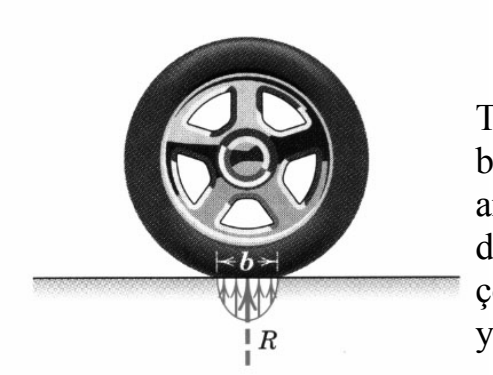
YAYILI KUVVETLER
(DISTRIBUTED FORCES)

Yayılı Kuvvet (Distributed Force)

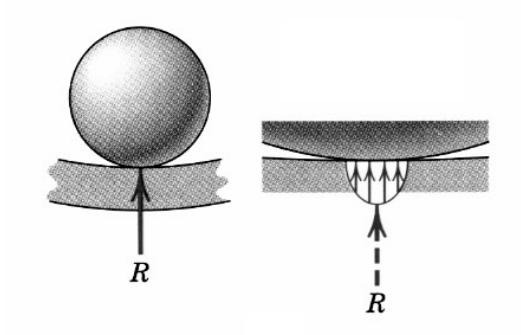
Tekil Kuvvet (Point Force – Concentrated Force)

Her noktasal (tekil) kuvvet, aslında çok küçük bir alana etkiyen YAYILI KUVVET (YÜK) gibi düşünülebilir.



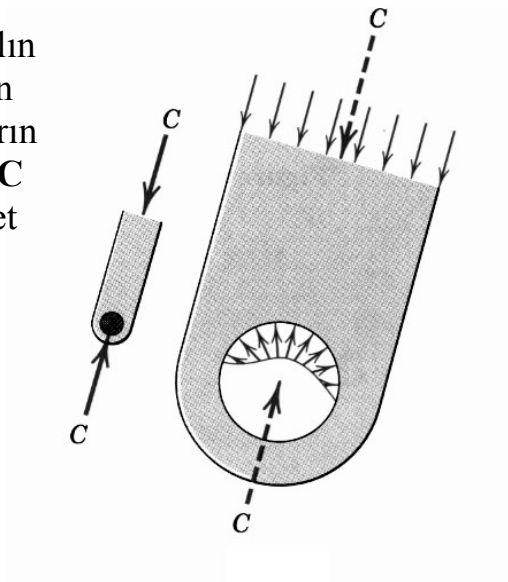
Temas alanının boyutu b <<, tekerlekler arasındaki uzaklık gibi diğer büyülüklerde çok küçük ve lastik yumuşak.

Bilyeli yataktaki çelik (sert) küre



İç Kuvvetler (Internal Forces)

İki kuvvet elemanına etkiyen kuvvet mafsalın kesiti boyunca etkiyen kuvvetler olup, bunların bileşkesi olan bir tek **C** kuvveti TEKİL kuvvet olarak alınır.

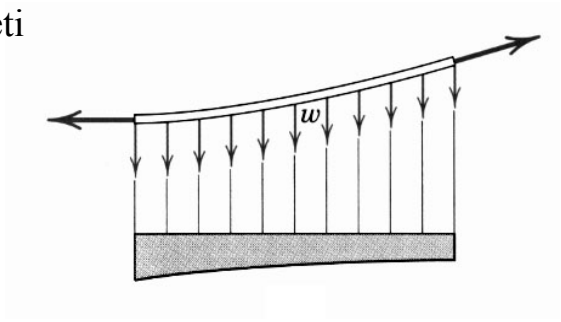


Bu hallerde aslında yayılı olan temas kuvvetleri noktasal (tek kuvvet olarak) alınır.

Çizgisel Yayılı Kuvvetler (Line Distributed Forces)

ω : yayılı yükün şiddeti
= birim uzunluğa
etkiyen kuvvet

$[\omega]=\dfrac{N}{m^2}$

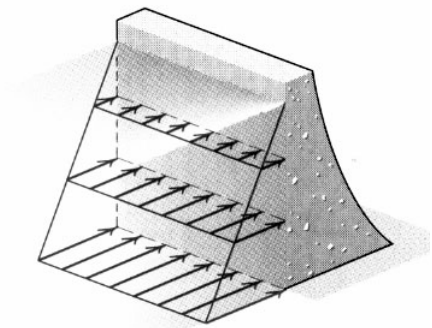


Kuvvetlerin cisme etkidiği alanın boyutu diğer boyutlar yanında çok küçük değilse kuvvetleri yayılı kuvvetler olarak alırız.

Alana Yayılı Kuvvetler (Area Distributed Forces)

ω = Birim alana
etkiyen kuvvet

$[\omega]=\dfrac{N}{m^2}=P$
= Basınç=Pascal

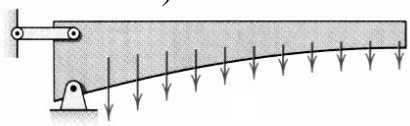


Baraj kapağına suyun etkisi (yayılı yük)

Kuvvetlerin katı cisim içerisindeki dağılımı STRESS olarak adlandırılır.

Hacme Yayılı Kuvvetler (Volume Distributed Forces)

Body force (yerçekimi kuvveti)



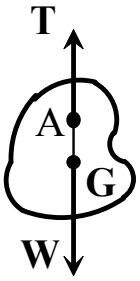
$\omega = \rho g$ birim ağırlık

Birimi : $\rho : \dfrac{kg}{m^3}$

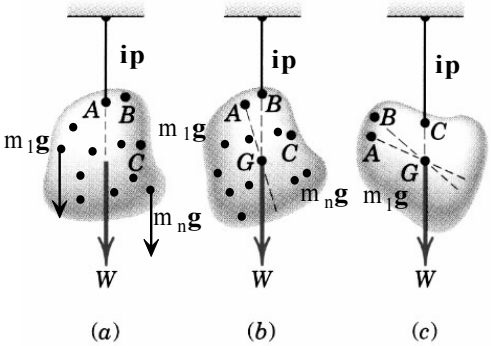
$g : \dfrac{m}{s^2}$, Sonuç : $\left(\dfrac{kg}{m^3}\right)\left(\dfrac{m}{s^2}\right.$

$\dfrac{N}{\ }$, N: $\dfrac{kg.m}{\ }$

Kütle Merkezi (Mass Center)



Ser. Cis. Diag.

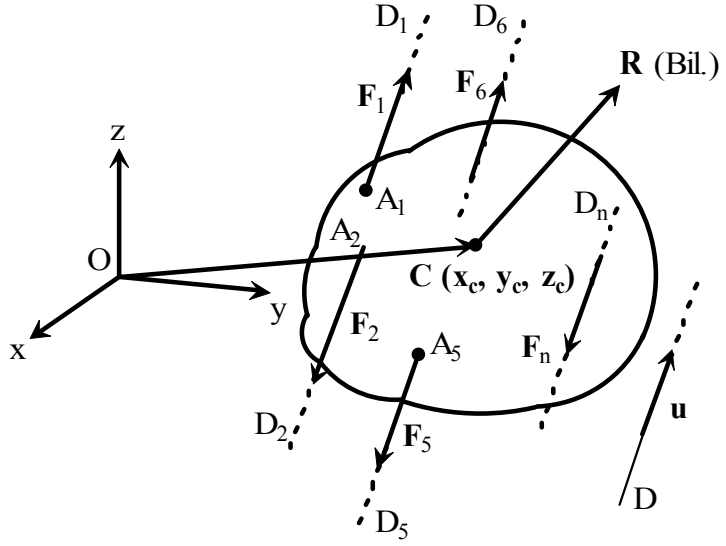


A,B, ve C asmalarında **T** ile **W** aynı doğrultulu olup, doğrultular bir G noktasında kesişirler. G ağırlık merkezidir.

Bağlı ve paralel kuvvet sisteminin MERKEZİ:

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

O (0, 0, 0)
C (x_c, y_c, z_c)



$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} \quad ; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

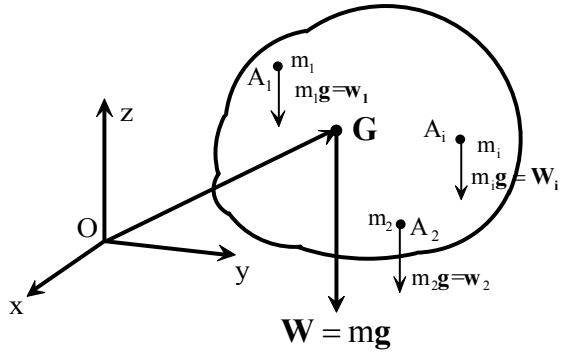
Şeklinde paralel ve bağlı kuvvet sisteminin BİLEŞKESİNİN TATBİK NOKTASINI (KUVVET SİSTEMİNİN MERKEZİNİ) elde etmiştik.
Bu sonuçları AĞIRLIK VE KÜTLE MERKEZİNİN hesabında kullanacağız.

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum W_i \mathbf{OA_i}}{\sum W_i}$$

$$x_G = \frac{\sum W_i x_i}{\sum W_i}$$

$$y_G = \frac{\sum W_i y_i}{\sum W_i}$$

$$z_G = \frac{\sum W_i z_i}{\sum W_i}$$



$$\mathbf{W} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + \ldots + m_n\mathbf{g}$$

$$\mathbf{W} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\mathbf{g}$$

$$\mathbf{W} = \sum m_i \mathbf{g}$$

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g}$$

Bu bağlantılar sürekli cisimler için birer integral ile temsil edilebilirler.

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\int x dw}{\int dw} \qquad \int dw = toplam\ ağırlık \\ y_G &= \frac{\int y dw}{\int dw} \quad , \quad z_G = \frac{\int z dw}{\int dw} \end{aligned}\right\} \text{Ağırlık Merkezi}$$

G cismin ağırlık merkezidir.
Dw = gdm ; w = $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)g$ = mg alınarak,

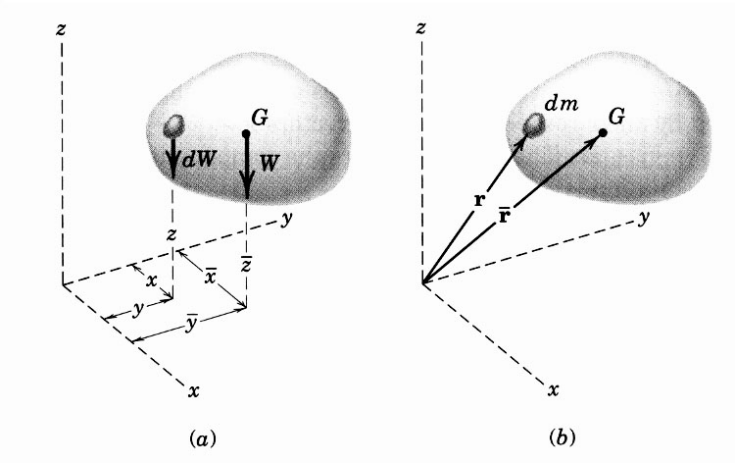
$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\int xgdm}{\int gdm} = \frac{\int xgdm}{gm} = \frac{\int xdm}{m} \\ y_G &= \frac{\int ygdm}{\int gdm} = \frac{\int ygdm}{gm} = \frac{\int ydm}{m} \\ z_G &= \frac{\int zgdm}{\int gdm} = \frac{\int zgdm}{gm} = \frac{\int zdm}{m} \end{aligned}\right\} \textit{Kütle Merkezi}$$

$$x_G = \overline{x}\ ,\ y_G = \overline{y}\ ,\quad z_G = \overline{z} \quad alınabilir.$$

Sürekli ve Homojen cisimlerde Kütle Merkezi ile Ağırlık merkezi çakışıktır.
dm = ρ dV ; ρ : yoğunluk, dV hacim elemanı konulursa, G kütle merkezinin ifadesi ;

$$\left|\begin{aligned} \overline{x} &= x_G = \frac{\int x\rho dV}{\int \rho dV} \\ \overline{y} &= y_G = \frac{\int y\rho dV}{\int \rho dV} \\ \overline{z} &= z_G = \frac{\int z\rho dV}{\int \rho dV} \end{aligned}\right. \begin{bmatrix} \text{ve eğer} \\ \rho = \text{sb} \\ \text{ise} \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\begin{aligned} \overline{x} &= x_G = \frac{\int xdV}{\int dV} = \frac{\int xdV}{V} \\ \overline{y} &= y_G = \frac{\int ydV}{\int dV} = \frac{\int ydV}{V} \\ \overline{z} &= z_G = \frac{\int zdV}{\int dV} = \frac{\int zdV}{V} \end{aligned}\right\} \left(\begin{aligned} &Geometrik\ Merkez \\ &Centroid = Sentroid \end{aligned}\right.$$

şeklini alır.



Eksenlere göre Varignon Teoremi uygulanırsa;

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dW}{W}$$

Ağırlık merkezi

bulunur. dW = g.dm ve W = m.g yazılırsa;

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dm}{m}$$

Kütle merkezi

bulunur.

Yukarıdaki skaler bağıntılar vektörel formda yazılabilir. Bunun için;

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

olduğu düşünülerek;

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{m}$$

Kütle merkezinin yer vektörü

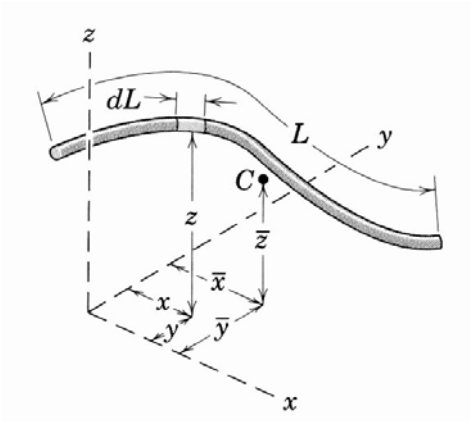
bulunur.

dm = ρdV ve m = ρV yazılırsa;

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho\, dV}{\int \rho\, dV}$$

bulunur.

Çizgisel Elemanların Kütle Merkezi :



$$x_G = \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x(\rho A dL)}{\int \rho A dL}$$

ρ ve A kesiti sabit ise

Yukarıdaki çizgisel eleman için, yukarıdaki formüllerde dm=ρAdL yerleştirilirse;

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dL}{L}}$$

Sentroid

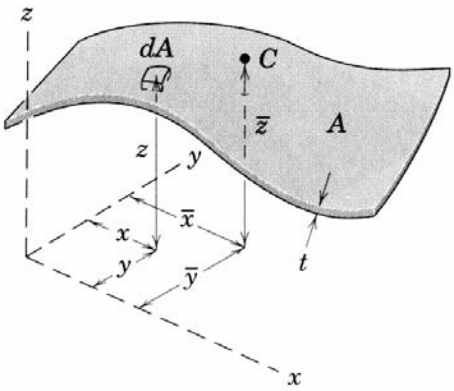
bulunur.

Yüzeysel Cisimlerin Kütle Merkezi :

Yukarıdaki formüllerde dm = ρ.t.dA yerleştirilirse (t yüzeyin kalınlığı);

t ve ρ sabit ise

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A}}$$



ρ ve t sabit değilse

$$\left.\bar{x} = \frac{\int x\rho t dA}{\int \rho t dA}\ ;\ \bar{y} = \frac{\int y\rho t dA}{\int \rho t dA}\ ;\ \bar{z} = \frac{\int z\rho t dA}{\int \rho t dA}\right\}$$

Kütle Merkezi olur.

$\rho = \rho\,(x, y, z)$ ve $t = t(x, y, z)$ olabilir.

Hacimlerin Kütle Merkezi :

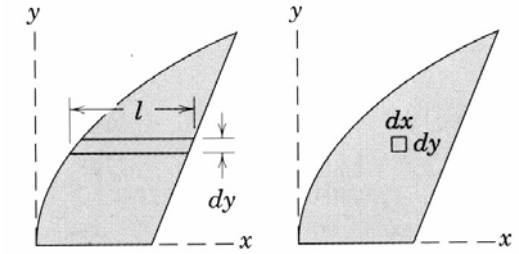
$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} \; ; \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} \; ; \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

Yukarıdaki formüllerde dm = ρ.dV yerleştirilirse; $\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}$ ve $\rho = \text{sb. ise}$

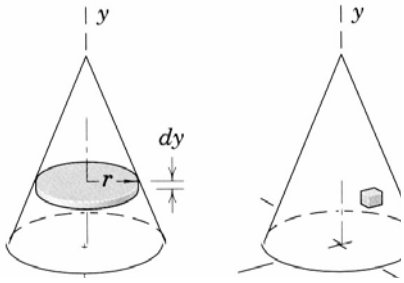
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V}}$$

bulunur.

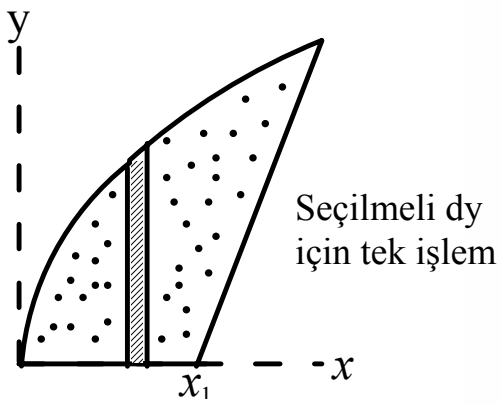
Integrasyon Elemanının Seçimi : 1) Elemanın mertebesinin seçimi



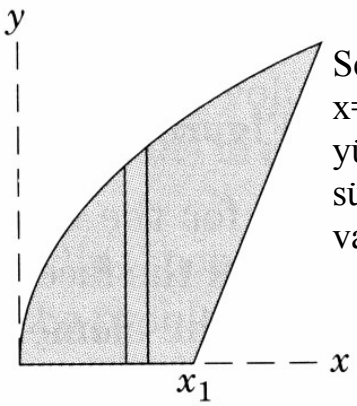
Alan elemanı dA = *l*.dy seçilebilir. dA = dx.dy şeklinde seçilmemelidir.



Hacim elemanı dV = πr^2.dy seçilebilir. dV = dx.dy.dz şeklinde seçilmemelidir.
2) Elemanı seçerken, integrasyon boyunca sürekliliğe dikkat etmek gerekir.
Bir tek sürekli işlem ile bölgede integral alınabilmeli.



Seçilmeli dy için tek işlem



Seçilmemeli $x=x_1$ de yükseklikte süreksizlik var.

3) Yüksek mertebeden küçük terimler ihmal edilebilir.

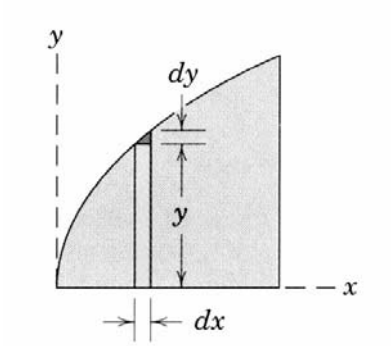
dA=ydx

in yanında

ds= $\frac{dsdy}{2}$

ihmal edilir

Limit halde hata yoktur.



$$ds = \frac{dxdy}{2} << 1$$

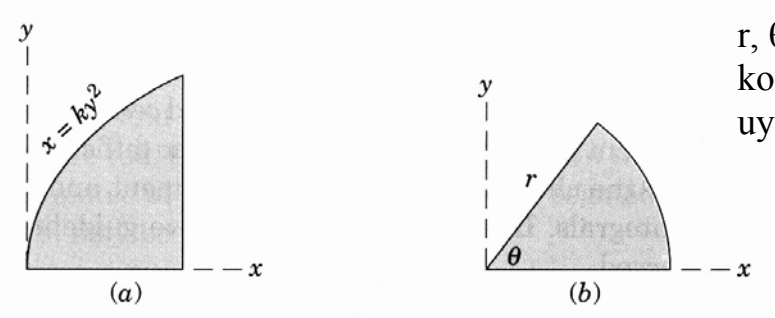
$$dx << 1$$

$$dy << 1$$

ihmal edilebilir.

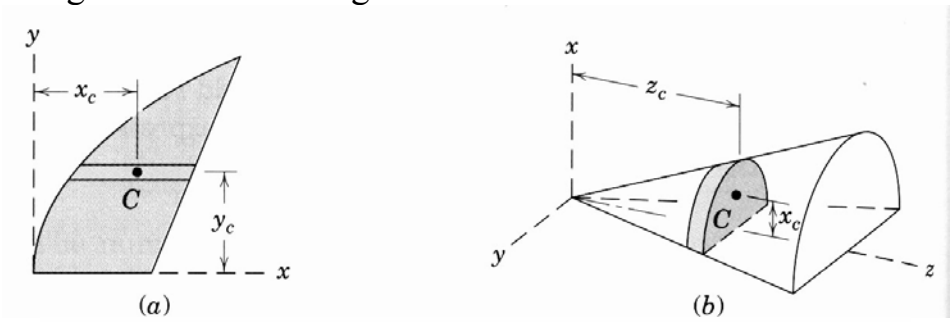
4) Verilen alanın sınırlarını en iyi temsil eden eksen takımı seçilir.

x, y dik eksen takımı uygun



r, θ polar koordinat uygun.

5) Alan veya hacim elemanı seçildiğinde, değişken koordinatın, elemanın kütle merkezi olduğuna dikkat etmek gerekir.



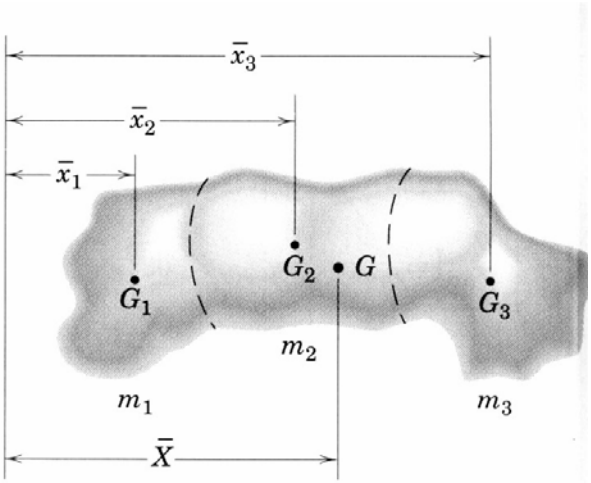
$$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c \, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c \, dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c \, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c \, dV}{V}$$

Bileşik Cisimlerin Kütle Merkezi :

Kütle merkezinin konumunun bulunması istenen cisim karmaşık bir geometriye sahip ise ve cisim, geometrik merkezi kolayca bulunabilen birçok parçaya ayrılabiliyorsa, karmaşık geometrili (bileşik cisim) cismin kütle merkezinin koordinatları, diğer basit cisimlerin kütle merkezlerinin koordinatlarından yararlanılarak bulunabilir.

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum m_i \mathbf{OG_i}}{\sum m_i} = \frac{m_1\mathbf{OG_1} + \ldots + m_n\mathbf{OG_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$



$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Varignon teoremi kullanılarak,

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

ve

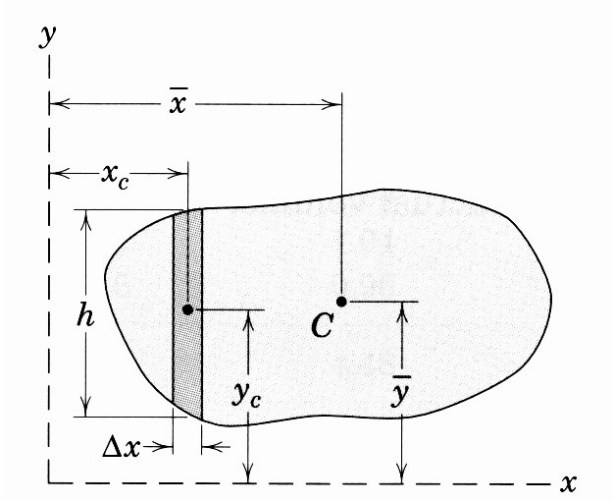
$$\boxed{\bar{X} = \frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}}$$

bulunur. NOT: m yerine L, A veya V'nin kütlesi alınarak eğrilerin (uzunlukların), Alanların ve Hacimlerin kütle merkezleri yazılır.

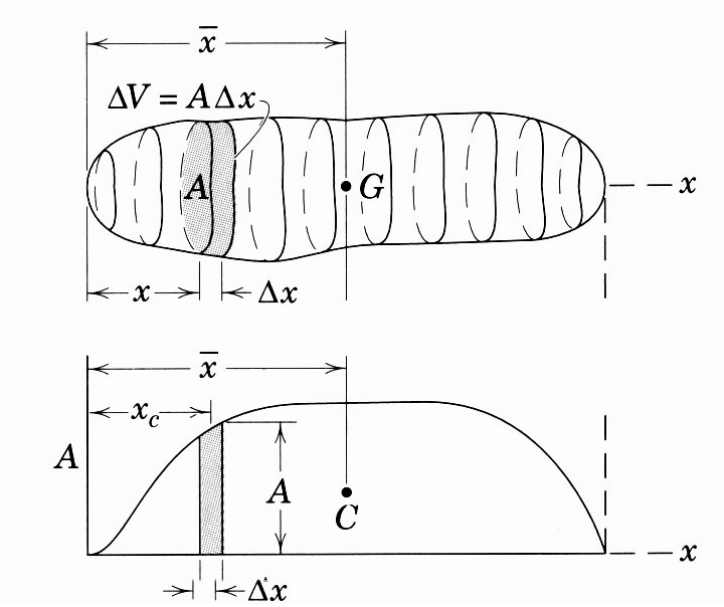
<u>Bazı Kabuller :</u> Karmaşık (bileşik) cisim basit cisimleri kütle merkezi kolay hesaplanan basit bölümlere ayrılamıyorsa, bu tip cisimlerin kütle merkezinin koordinatlarının belirlenmesi için bazı kabuller ve yaklaşımlar yapılır.

Örneğin; Karmaşık A alanı aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi h.Δx şeklinde ince dikdörtgen şeritlere ayrılarak (Bu şeritlerin kütle merkezi x_c ve y_c ise) kütle merkezinin koordinatları bulunabilir.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A x_c}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma A y_c}{\Sigma A}$$



Karmaşık bir hacmin kütle merkezinin koordinatları da benzer şekilde Δx kalınlığında hacim elemanlarına ayrılarak bulunabilir.



$$\bar{x} = \frac{\Sigma (A\ \Delta x) x_c}{\Sigma A\ \Delta x} \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma V x_c}{\Sigma V}$$

PAPPUS Teoremi

Bir eğrinin veya bir alanın kendisini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzey veya dönel hacimlerin kütle merkezinin koordinatları Pappus Teoremi ile kolayca bulunabilir.

Bir Eğrinin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan üç boyutlu yüzeyin kütle merkezi için, şekildeki halkanın alanı olan dA = 2πydL ifadesinden yararlanılır.

$$A = 2\pi \int y\, dL$$

NOT: y eksen etrafında dönme halinde

$dA = 2\pi x dL$

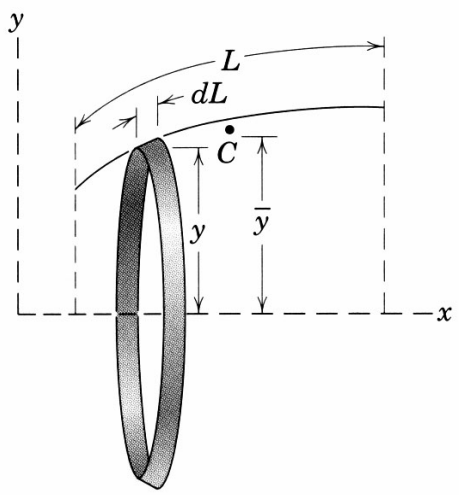
$A = 2\pi \int x\, dL$

ve $\bar{x} = \dfrac{\int x\, dL}{L}$ den

A=2π $\bar{x}$ L

bulunur

$$A = 2\pi \int y\, dL$$



$\bar{y} = \dfrac{\int y dL}{L}$ idi

$\int y dL = L\bar{y}$

konularak

$$\boxed{A = 2\pi \bar{y} L}$$

Bir A alanının x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmin kütle merkezinin koordinatları da, şekildeki dA alanının dönmesiyle oluşan halka hacmin integrali ile bulunabilir.

dV = 2πydA

Toplam hacim

$$V = 2\pi \int y\, dA$$

x etrafında dönme:

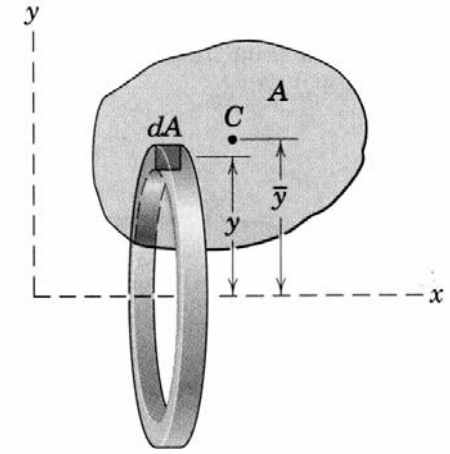
$dV = 2\pi y dA$

$V = 2\pi \int y dA$

$\bar{y} = \dfrac{\int y dA}{A}$

$\int y dA = \bar{y} A$ konulursa

$V = 2\pi \bar{y} A$



Varignon teoreminden,

$$\bar{y} A = \int y dA$$

yukarıdaki bağıntı kullanılarak, toplam hacim;

$$\boxed{V = 2\pi \bar{y} A}$$

şeklinde yazılabilir.

NOT: y ekseni etrafında dönme:

$dV = 2\pi x dA$

$V = 2\pi \int x dA$

$\bar{x} = \dfrac{\int x dA}{A}$ dan

$V = 2\pi \bar{x} A$

Eğer dönme açısı 2π den daha küçük bir θ açısı kadar ise, bu durumda, yukarıdaki bağıntılardan da yararlanarak, dönel yüzeyin A alanı ve dönel hacmin V değeri,

$$\boxed{A = \theta \bar{y} L}$$

$$\boxed{V = \theta \bar{y} A}$$

şeklinde bulunur.

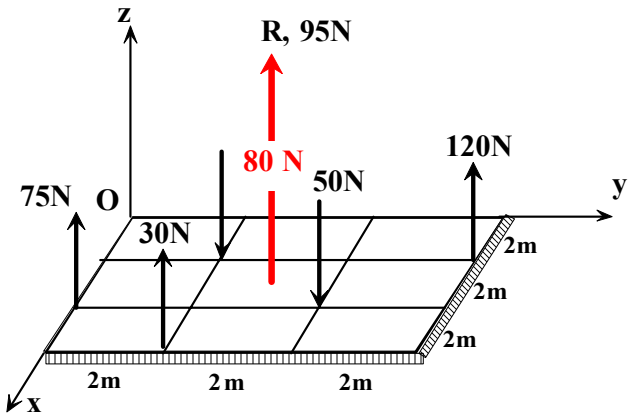
NOT: y ekseni etrafında dönme halinde:

$A = \theta \bar{x} L$

ve

$V = \theta \bar{x} A$

Örnek Problem: Verilen paralel ve bağlı kuvvet sisteminin bileşkesini, O noktasına göre momentini ve bileşkenin oxy düzlemini kestiği (Sistemin merkezini) noktayı belirleyiniz.



$$\mathbf{R} = (75+30+120)\mathbf{k} - (80+150)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R} = 95\mathbf{k}\ N$$
$$\mathbf{M_0} = 4\mathbf{i}\times 75\mathbf{k} + (6\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times 30\mathbf{k}$$
$$+(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(-80\mathbf{k})$$
$$+(4\mathbf{i}+4\mathbf{j})\times(-50\mathbf{k}) + (2\mathbf{i}+6\mathbf{j})\times(120\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M_0} = 420\mathbf{i} - 360\mathbf{j}$$

R.M$_0$ = İnvaryant ≡ 0 bulunur. Sistem bir tek kayan vektöre indirgenebilir. Bu bir tek kayan vektör **r = R** olup tesir çizgisi sistemin eksenidir.

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum F_i \mathbf{OA_i}}{\sum F_i} \Rightarrow$$

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{75(4)+30(6)-80(2)-50(4)+120(2)}{95}$$

$$x_C = \frac{360}{95} = 3,79\text{m}$$

$$y_C = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{75(0)+30(2)-80(2)-50(4)+120}{95}$$

$$y_C = 4,42\text{m}$$

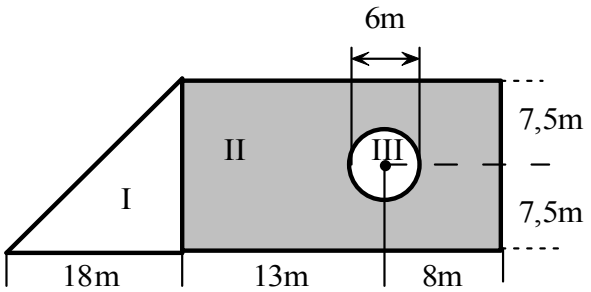
veya: $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{OC}\times\mathbf{R}$

$$420\mathbf{i}\text{-}360\mathbf{j} = (x_C\mathbf{i} + y_C\mathbf{j})\times 95\mathbf{k}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}: 420 = 95y_C \\ \mathbf{j}: -360 = -95x_C\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y_C = \dfrac{420}{95} = 4,42\text{m} \\ x_C = \dfrac{360}{95} = 3,79\text{m}\end{array}\right. \quad \text{aynı sonuç.}$$

Örnek Problem: Şekildeki taralı alanın ağırlık merkezini belirleyiniz.

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$



$$x_C = \frac{gm_1x_1 + gm_2x_2 + gm_3x_3}{gm_1 + gm_2 + gm_3}$$

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\rho s_1x_1 + \rho s_2x_2 + \rho s_3x_3}{\rho s_1 + \rho s_2 + \rho s_3} = \frac{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x}{s_1 + s_2 + s_3}$$

Eleman	Alan S_i	x_{Ci}	y_{Ci}	$x_{Ci}\,S_i$	$y_{Ci}\,S_i$
I Üçgen	(18)(15)/2 = 135	2h/3 = 2(18)/3 = 12	h/3=15/3 =5	135x12 =1620	**135x5 =675**
II Dikdörtgen	21x15 = 315	18 + 21/2 =28,5	h/2 = 7,5	315x28,5 = 8977,5	**315x7,5 =2362,5**
III Daire	$\pi.r^2 = \pi.9$ =28,26	18+13=31	7,5	28,26x31 =876,06	**28,26x7,5 =212**
Top	421,74			9721,44	2825,5

$$x_C = \frac{1620 + 8977,5 - 876,06}{135 + 315 - 28,26} = \frac{9721,44}{421,74} = 23,05\text{m}$$

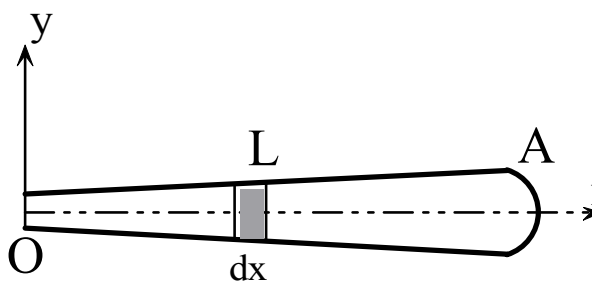
$$y_C = \frac{675 + 2362,5 - 212}{421,74} = \frac{2825,5}{421,7} = 6,7\text{m}$$

Örnek Problem : Yoğunluğu bir ucundan uzaklığının α katı olan L uzunluğundaki doğrusal ince bir telin kütle merkezini bulunuz.

$$y_C = 0, \begin{pmatrix} \text{x ekseni simetri} \\ \text{ekseni seçildi} \end{pmatrix}$$

$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho dL}{\rho dL}$$

$$x_C = \frac{\int_0^L x(\alpha . x) dx}{\int_0^L \alpha x \, dx} = \frac{\alpha \frac{x^3}{3} \Big|_0^L}{\alpha \frac{x^2}{2} \Big|_0^L} = \frac{2}{3} L$$



$$dm = \rho dL$$
$$= \alpha x \underbrace{dx}_{dL}$$

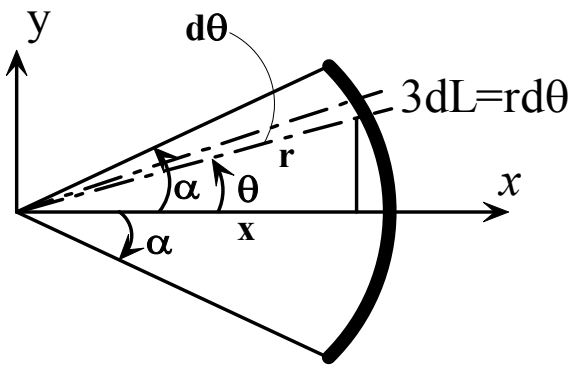
Örnek Problem:
2α merkez açılı r yarıçaplı çember yayının (düzgün) kütle merkezini bulunuz.

x_C simetri eskeni seçildi $\Rightarrow \boxed{y_C = 0}$

$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho r d\theta}{\int \rho r d\theta}$$

$$x_C = \frac{\int x r d\theta}{\int r d\theta} = \frac{\int r^2 \cos\theta d\theta}{\int r d\theta}$$

$$x_C = \frac{r^2}{r} \frac{\sin\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}} = \frac{r \sin\theta}{\alpha}$$



$$dm = \rho dL$$
$$dm = \rho r d\theta$$
$$x = r \cos\theta$$

NOT: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ise $x_C = \frac{r \sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}$ yarım çember

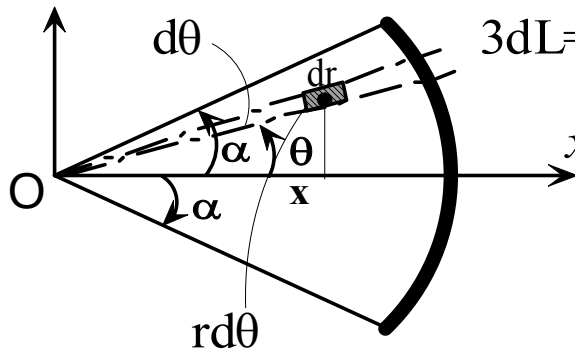
$\alpha = \pi$ ise $x_C = \frac{r \sin\pi}{\pi} = 0$ çember

C(0,0)

Örnek Problem: Merkez açısı 2α olan daire parçasının kütle merkezini bulunuz.

x simetri ekseni seçildi

$$\boxed{y_C = 0}$$



$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho r dr d\theta}{\int \rho r dr d\theta}$$

$$x_C = \frac{\int_0^r \int_{-\alpha}^{+\alpha} 2\cos\theta d\theta dr}{\int\int r d\theta dr}$$

$$x_C = \frac{\int_0^r r^2 \sin\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} dr}{\int_0^r \theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} dr} = \frac{\int_0^r 2\sin\alpha . r^2 dr}{\int_0^r 2\alpha dr}$$

$$dA = r d\theta dr$$

$$dm = \rho r d\theta dr$$

$$x = r\cos\theta$$

$$x_C = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\frac{r^3}{3}\Big|_0^r}{\frac{r^2}{2}\Big|_0^r} = \frac{2r}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

NOT: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ise (*yarım daire*) $x_C = \frac{2r}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$

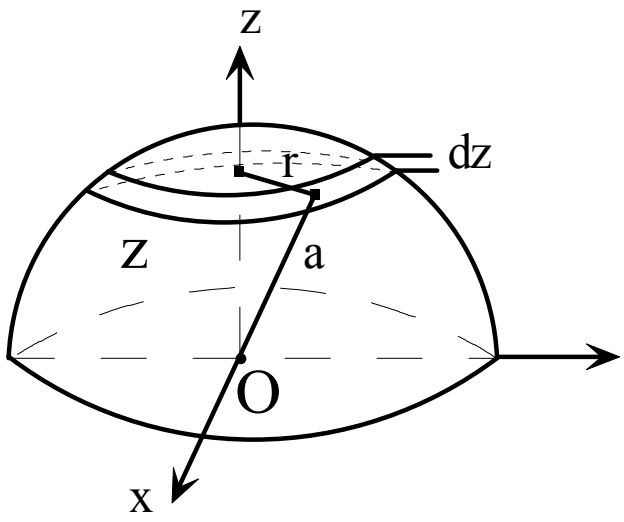
$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ise $x_C = \frac{2r}{3\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2r}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$ (*Dörtte bir daire*)

$\alpha = \pi$ ise $x_C = \frac{2r}{3}\frac{\sin\pi}{\pi} = 0$ (*daire*)

Örnek Problem: Şekildeki yarım kürenin kütle merkezini hesaplayınız.

z ekseni simetri eksenidir.

x_c ve y_c sıfır.



$$z_C = \frac{\int z dm}{dm}$$

$$z_C = \frac{\int z \rho \pi r^2 dz}{\int \rho \pi r^2 dz}$$

$$dm = \rho(\pi r^2)\mathrm{dz}$$

$$a^2 = z^2 + r^2$$

$$r^2 = a^2 - z^2$$

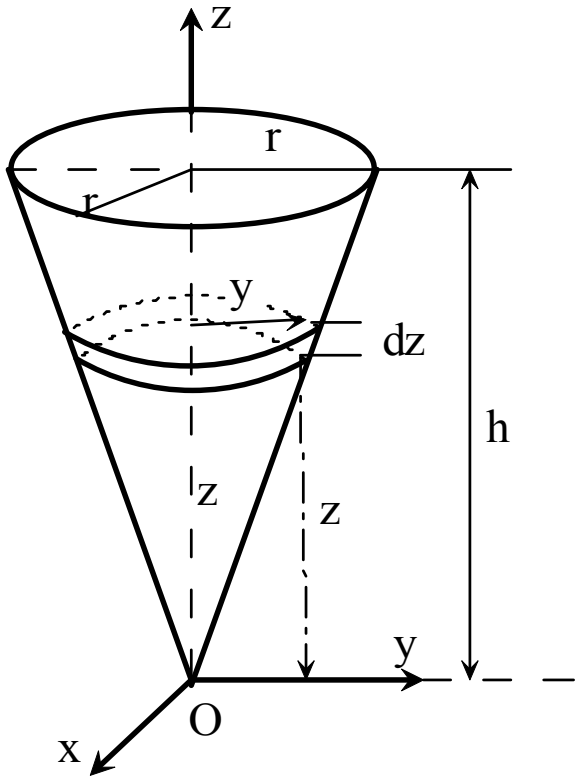
$$z_C = \frac{\int_0^a z(a^2 - z^2)\mathrm{dz}}{\int_0^a (a^2 - z^2)\mathrm{dz}}$$

$$z_C = \frac{a^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^a - \frac{z^4}{4}\Big|_0^a}{\quad} = \frac{3a}{\quad}$$

Örnek Problem: Şekildeki homojen koninin ağırlık merkezinin koordinatlarını belirleyiniz.

Z ekseni simetri eksenidir.

G (x_G=0, y_G=0, z_G=0)



$$z_G = \frac{\int z dw}{\int dw}$$

$$\left| \begin{array}{l} dw = \rho dV \\ dw = \rho(\pi y^2 dz) \\ dw = \rho \pi y^2 dz \end{array} \right.$$

$$z_G = \frac{\int z \rho \pi y^2 dz}{\int \rho \pi y^2 dz}$$

$$= \frac{\int z y^2 dz}{\int y^2 dz}$$

$$z_G = \frac{\int z(\frac{rz}{h})^2 dz}{\int \frac{r^2 z^2}{h^2} dz} = \frac{\int_{0}^{h} z^3 dz}{\int_{0}^{h} z^2 dz} \frac{z}{h} =$$

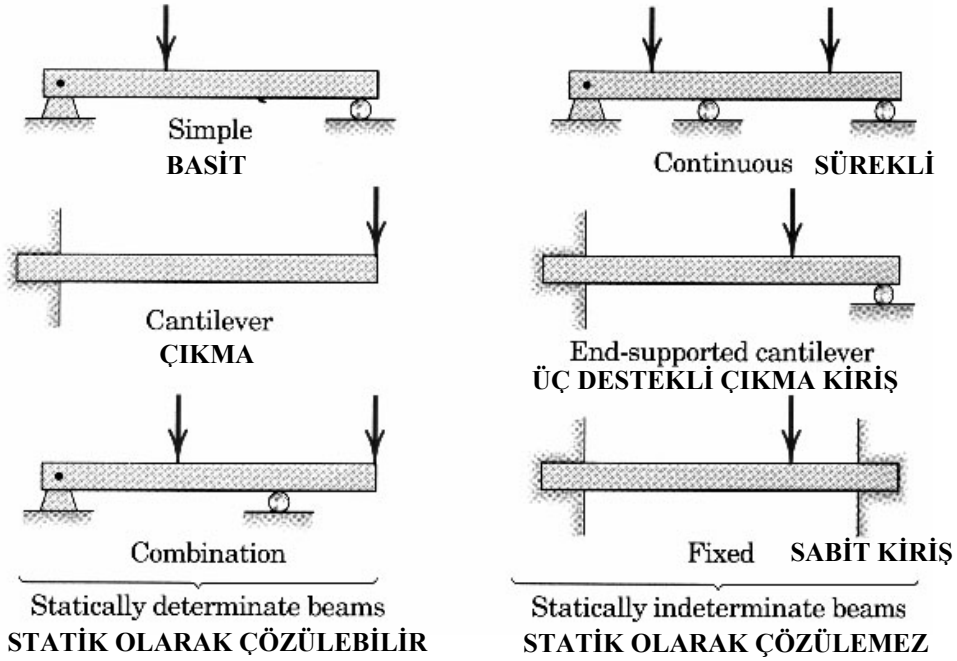
$$y = \frac{r^3}{h}$$

$$\frac{z^4}{4}\Big|^{h}$$

Kirişler (Beams) :

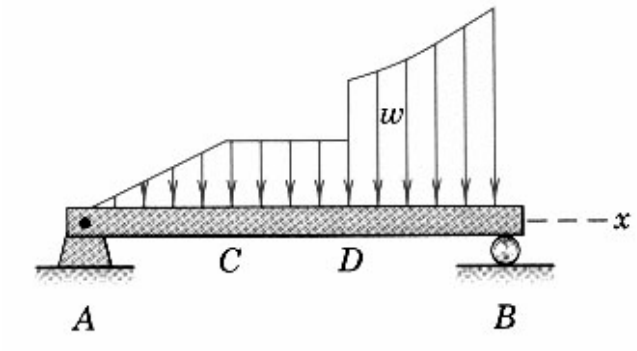
Dış kuvvetlerin etkisindeki taşıyıcı sistem olarak kirişler, mühendislik uygulamalarında çok sık kullanılırlar.

Değişik sınır şarlarında kirişler;



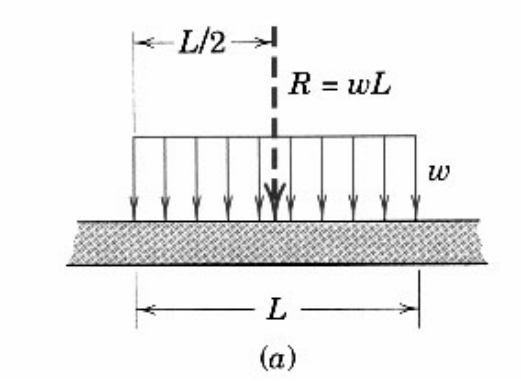
<u>Yayılı Yükler :</u>

Birim uzunluğa etki eden yayılı yükün büyüklüğüne, o yayılı yükün şiddeti (ω veya q) adı verilir.
Yayılı yükün şiddeti sabit, lineer değişen veya bir fonksiyon şeklinde değişebilir.



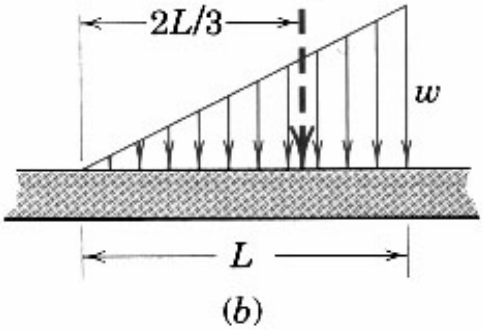
Şiddeti sabit olan yayılı yük ;

R=ωL=ALAN
R, Geometrik merkezden geçer



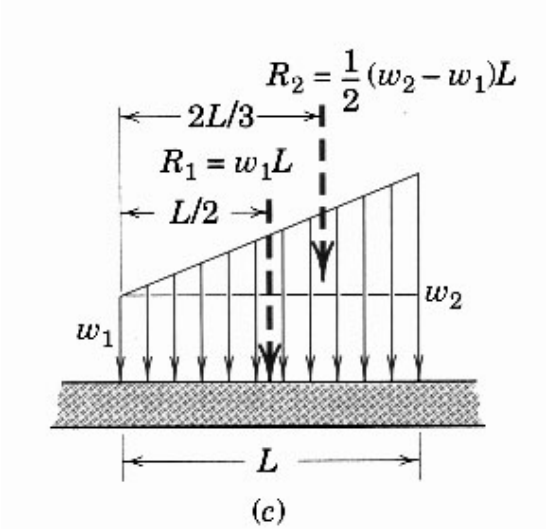
Şiddeti sıfırdan başlayıp, lineer (doğrusal) değişen yayılı yük ;

$R = \frac{1}{2} wL$ = Üçgenin Alanı

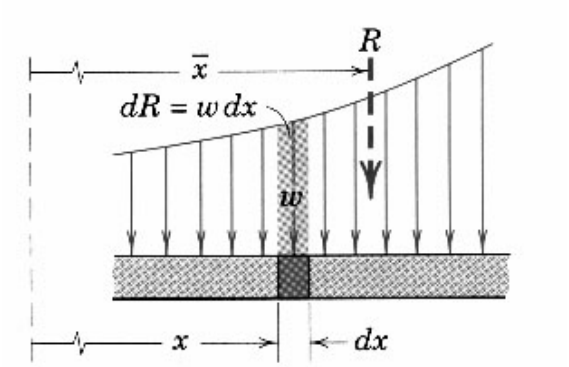


R, Sentroidden (Geometrik merkez)geçer.

Şiddeti belirli bir değerden başlayıp, lineer (doğrusal) değişen yayılı yük ;



Şiddeti belirli bir değerden başlayıp, bir fonksiyon şeklinde değişen yayılı yük ;



dx uzunluğuna etki eden kuvvet dR = ω.dx olduğuna göre, toplam kuvvet,

$$R = \int w\, dx$$

Yayılı yükün eşdeğeri olan toplam R kuvvetinin uygulama konumu,

$$\bar{x} = \frac{\int xw\, dx}{R}$$

şeklinde bulunur.

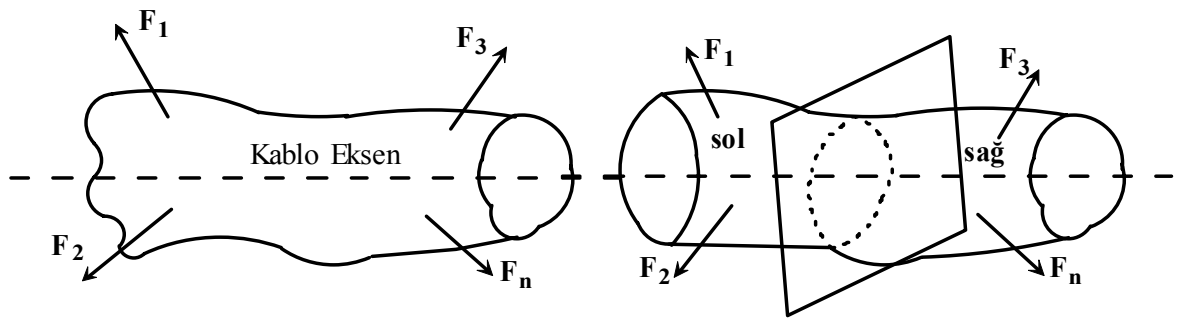
İç Etkiler

Dış kuvvetlerin etkisindeki bir kiriş, belirli bir konumundan kesildiğinde, kesitte oluşan etkiler;

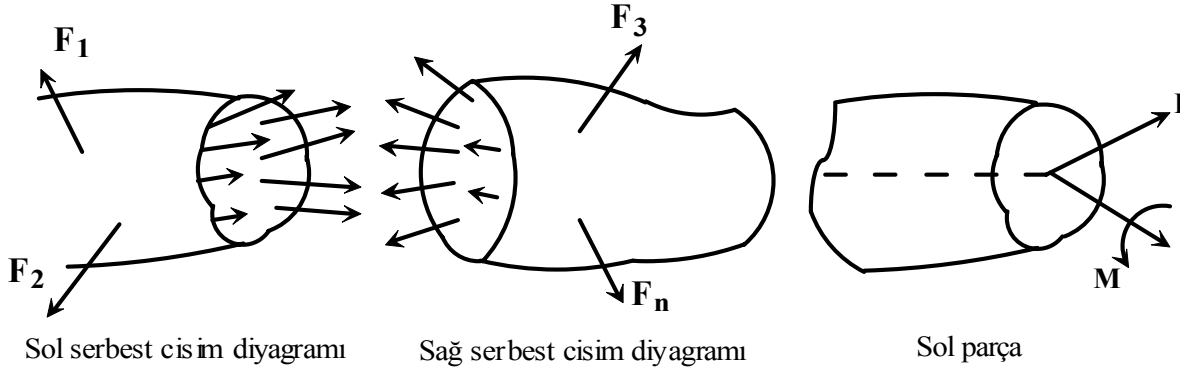
- Eksenel Kuvvet (Axial Force) : **H**
- Kesme Kuvveti (Shear Force) : **V**
- Eğilme Momenti (Bending Moment) : **M**
- Burulma Momenti (Torque) : **T**

şeklindedir.

Taşıyıcı sisteme bir dış kuvvet etkidiği zaman sistemde (elemanda) bu dış kuvveti dengelemeye çalışan bir iç kuvvetler sistemi oluşur.

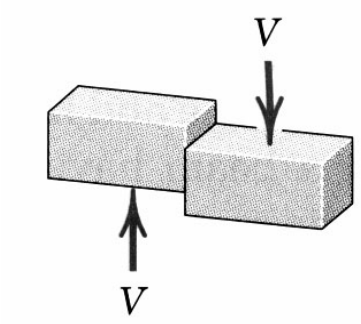


Dış kuvvetler çekme veya basınç olabilir. Elemanda iç kuvvetler sistemi oluşur. Elemanın eksenine dik olan bir kesit üzerinde iç kuvvetleri inceleriz. Ortaya çıkan hayali iki parça da dengede varsayımı yapılır. Birim alana etkiyen iç kuvvetlerin büyüklüğüne STRESS (Gerilme) denir.

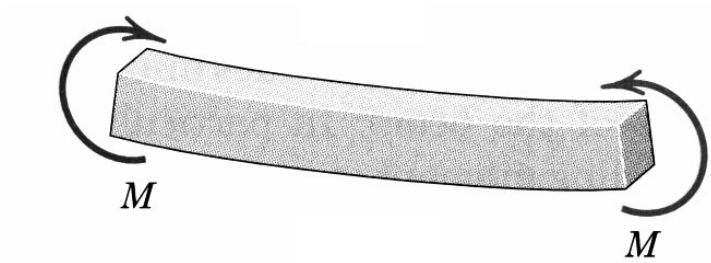


Sol parçadaki iç kuvvetler sistemini kesitin sentroidi olan noktaya taşırsak Bileşke **R** ve toplam moment **M** elde ederiz.

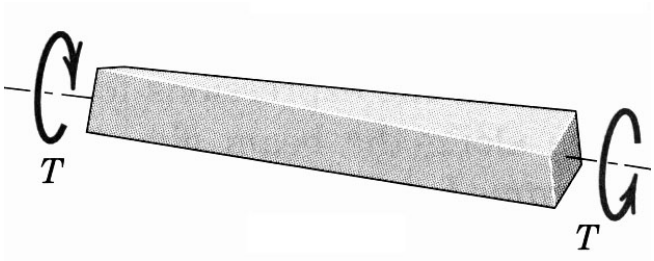
<u>Kesme Kuvveti (Shear Force)</u>



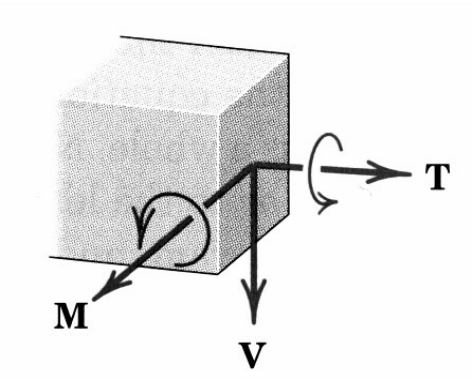
Eğilme Momenti (Bending Moment)



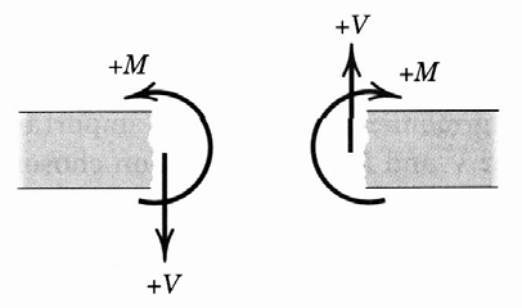
Burulma Momenti (Torsion)



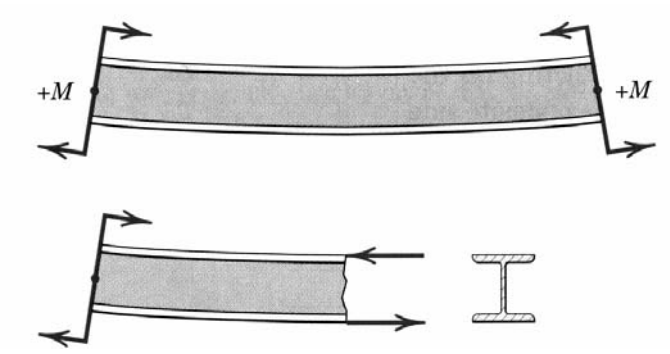
Bileşik Etki (Combined Loading)



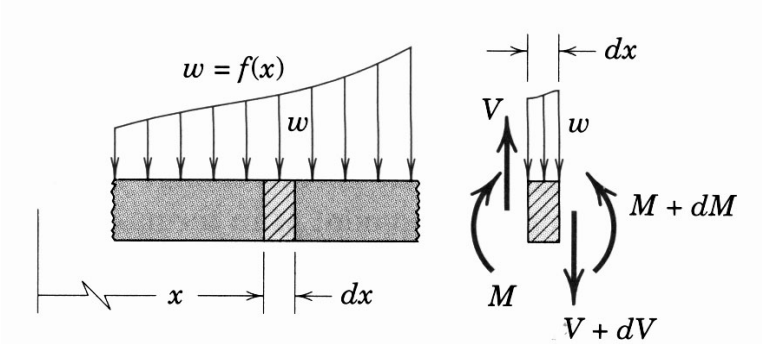
Düzlemsel kuvvetlerin etkisindeki bir kirişte, genellikle, kesme kuvveti ve eğilme momentinin etkileri önemlidir.
Kesme kuvveti ve Eğilme momentinin işaret notasyonu literatürde, genellikle, aşağıda görüldüğü gibi seçilir.



<u>Eğilme momentinin etkisi için örnek:</u> Kesiti H-profili olan kirişe pozitif eğilme momenti etki ederse, alt ve üst flanşlarda şekilde görüldüğü gibi, çekme ve basınç kuvvetleri oluşur.



Kesit Tesirleri Arasındaki Diferansiyel Bağıntılar:



$$V - w\,dx - (V + dV) = 0$$

$$\boxed{w = -\frac{dV}{dx}}$$

Yukarıdaki ifade integre edilerek, Kesme kuvveti ile yayılı kuvvetin şiddeti arasında bağıntı bulunur.

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w\, dx$$

$$V = V_0 + A$$

(A : x_0 ile x arasında, yayılı yük eğrisinin altındaki alanın negatif değeri)

Şekildeki dx uzunluğundaki elemanın moment dengesi yazılısa;

$$M + w\, dx \frac{dx}{2} + (V + dV)\, dx - (M + dM) = 0$$

ve ikinci dereceden küçük terimler ihmal edilerek,

$$\boxed{V = \frac{dM}{dx}}$$

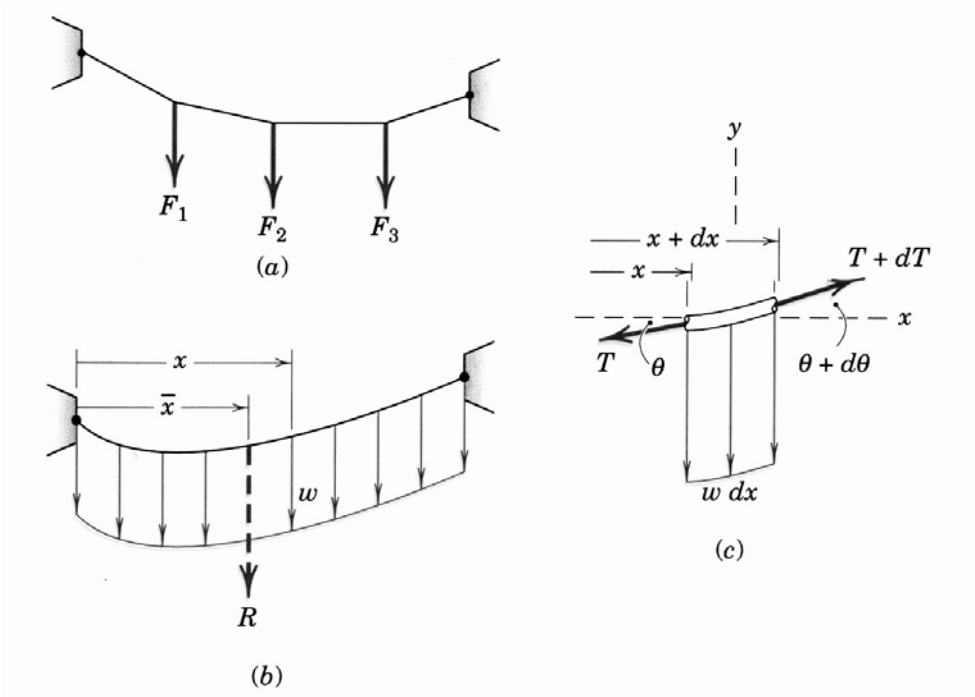
bulunur.
Eğilme momenti ile yayılı kuvvetin şiddeti arasındaki bağıntıyı bulmak için, yukarıdaki bağıntının türevi alınıp, kesme kuvvetinin ω cinsinden ifadesi yerleştirilirse,

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -w}$$

bulunur.

Kablo ve Sicimler

Bükülebilen taşıyıcı sistem olarak kablolar ve sicimler, iç etki olarak, sadece çekme kuvveti taşıyabilirler. Basınç kuvveti, kesme kuvveti, eğilme ve burulma momentleri taşıyamazlar.



<u>Genel Bağıntılar</u>

Şiddeti değişken bir yayılı yükün etkimesi durumunda, düşey doğrultudaki bileşke kuvvet,

$$R = \int dR = \int w\,dx$$

şeklindedir. Varignon teoremi uygulanarak, bileşke kuvvetin geçtiği konum bulunabilir.

$$R\bar{x} = \int x\,dR \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dR}{R}$$

Şekilde c deki elemanın dengesinden,

$$(T + dT)\sin(\theta + d\theta) = T\sin\theta + w\,dx$$
$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta$$

yazılır. sindθ = θ ve cosdθ = 1 yazılacak olursa,

$$(T + dT)(\sin\theta + \cos\theta\,d\theta) = T\sin\theta + w\,dx$$
$$(T + dT)(\cos\theta - \sin\theta\,d\theta) = T\cos\theta$$

İkinci dereceden küçük terimler ihmal edilirse,

$$T\cos\theta\,d\theta + dT\sin\theta = w\,dx$$
$$-T\sin\theta\,d\theta + dT\cos\theta = 0$$

veya

$$d(T\sin\theta) = w\,dx \qquad\qquad d(T\cos\theta) = 0$$

bulunur.

Burada 2. bağıntı, T nin yatay bileşeninin sabit olduğunu gösterir. Bu sabit değeri T_0 ile gösterecek olursak ve 1. bağıntıda $T = T_0 / \cos\theta$ yerleştirirsek,

$$d(T_0\tan\theta) = \omega.dx$$
$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

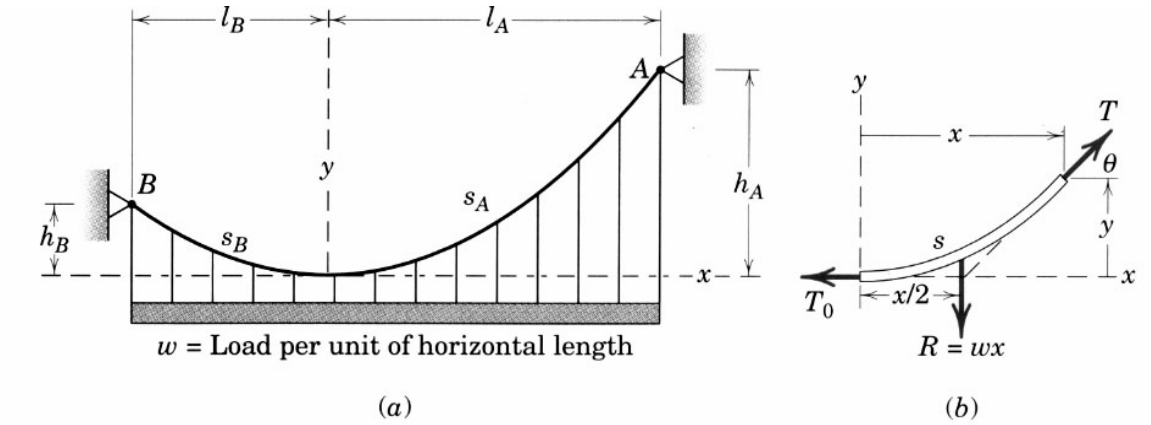
yerleştirilirse,

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}}$$

bulunur.
Bu ifade, kablonun diferansiyel denklemidir. İntegre edilip, sınır şartları kullanılarak, kablonun formunu veren y = y(x) fonksiyonu bulunur.

Parabolik Kablolar

Kabloya etki eden düşey yayılı kuvvetin şiddeti sabit olsun. Genel olarak, kablonun iki ucunun aynı yatay doğrultuda bulunmadığını kabul edelim.



Kablo denkleminin integrasyonu ile,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0} + C$$

bulunur. Seçilen koordinat sistemi için, x = 0 da eğim, dy/dx = 0 olacağından,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0}$$

yazılır. Bir kere daha integral alınırsa,

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{wx}{T_0}\,dx \qquad \boxed{y = \frac{wx^2}{2T_0}}$$

bulunur. Bu ifade düşey parabol denklemidir. Kablo kuvvetinin sabit olan yatay bileşeni, orijindeki kablo kuvvetidir.

x = l_A için y = h_A yazılırsa,

$$T_0 = \frac{w{l_A}^2}{2h_A} \qquad y = h_A(x/l_A)^2$$

bulunur.

Şeklin b bölümündeki elemanın dengesinden,

$$T = \sqrt{T_0{}^2 + w^2x^2}$$

yazılır ve T_0 yok edilirse,

$$T = w\sqrt{x^2 + (l_A{}^2/2h_A)^2}$$

bulunur. Maksimum kablo kuvveti $x = l_A$ konumundadır ve değeri,

$$T_{\max} = wl_A\sqrt{1 + (l_A/2h_A)^2}$$

dir.

Kablonun orijin ile A noktası arasındaki uzunluğunun bulunması istenirse,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

bağıntısı integre edilir.

$$\int_0^{s_A} ds = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (wx/T_0)^2}\, dx$$

İntegrasyon için,

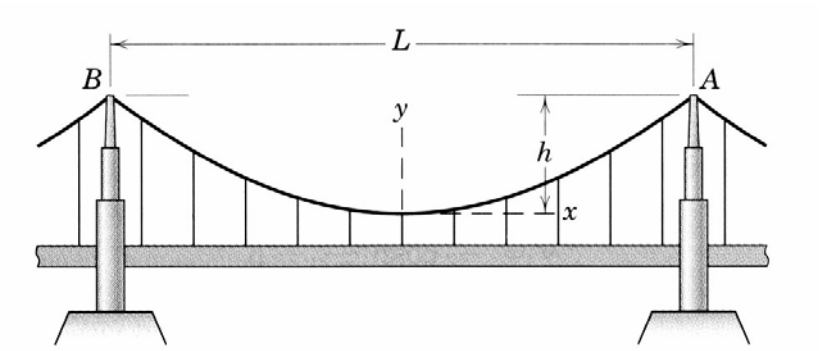
$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

seri ifadesi, kullanılırsa,

$$\begin{aligned} s_A &= \int_0^{l_A} \left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0{}^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0{}^4} + \cdots\right) dx \\ &= l_A\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Asma köprülerde kablonun iki ucu genellikle aynı yatay konumdadır. Bu durumda kablonun iki ucu arasındaki mesafe $L = 2\, l_A$ ve toplam kablo uzunluğu $S = 2\, s_A$ dır.



Bu değerler kullanılarak, maksimum kablo kuvveti ve toplam kablo uzunluğu,

$$T_{\max} = \frac{wL}{2}\sqrt{1 + (L/4h)^2}$$

$$S = L\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4 + \cdots\right]$$

şeklinde bulunur.

<u>Zincir Eğrisi</u>

Kabloya etki eden dış kuvvetin sadece üniform olan kablo ağırlığı olduğunu düşünelim. Bu durumda, şekildeki elemanın serbest cisim diyagramı değişecektir.

Kablonun birim uzunluğunun ağırlığı μ ise, bileşke kuvvet $R = \mu.s$ dir. $\omega.dx$ kuvveti ise, $\mu.ds$ değerine eşit olacaktır.

Bu durumda kablo diferansiyel denklemi,

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx}}$$

formundadır.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

dy/dx = p yazılacak olursa, diferansiyel denklem,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\mu}{T_0}\,dx$$

şeklini alır ve integrasyon sonucunda,

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \frac{\mu}{T_0}x + C$$

yazılır. X = 0 konumunda dy/dx = p = 0 olduğundan C = 0 dır. dy/dx = p yazılırsa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \sinh\frac{\mu x}{T_0}$$

bulunur. Tekrar integre edilirse,

$$y = \frac{T_0}{\mu}\cosh\frac{\mu x}{T_0} + K$$

bulunur. K integral sabiti, x = 0 da y = 0 yazılarak hesaplanır.

Bu durumda,

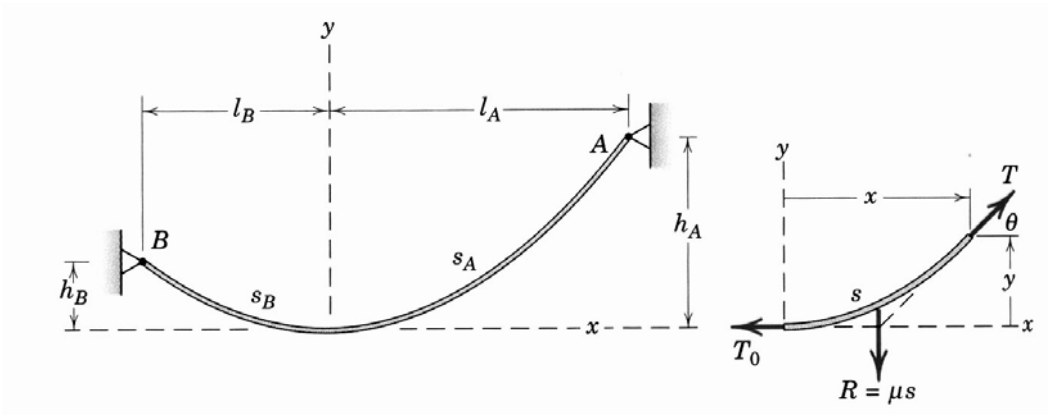
$$K = -T_0/\mu$$

yazılarak,

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right)$$

bulunur.

Bu bağıntı iki ucundan asılan, kendi ağırlığının etkisindeki kablonun aldığı formdur ve Zincir Eğrisi olarak bilinir.



Şekildeki elemanın serbest cisim diyagramından,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \mu s / T_0$$

bağıntısı kullanılarak, kablo uzunluğu,

$$s = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0}$$

şeklinde bulunur. Şekildeki elemanın kuvvet dengesinden,

$$T^2 = \mu^2 s^2 + T_0{}^2$$

veya

$$T^2 = T_0{}^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\mu x}{T_0}\right) = T_0{}^2 \cosh^2 \frac{\mu x}{T_0}$$

veya

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0}$$

veya

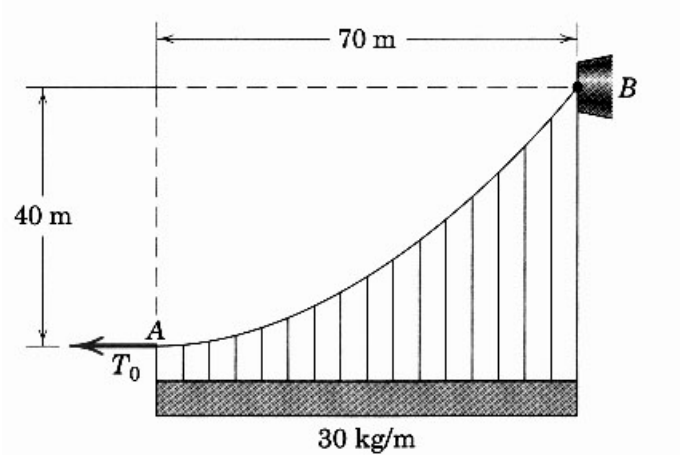
$$T = T_0 + \mu y$$

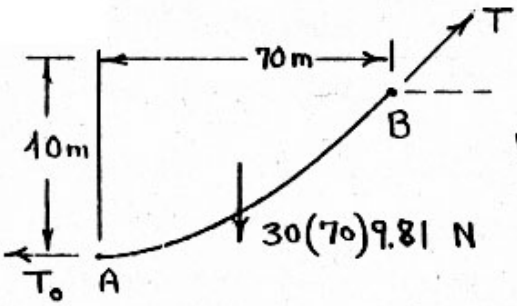
bulunur.

UYGULAMA

Problem 5/141

Şekilde görüldüğü gibi, yatayda üniform (şiddeti sabit) yayılı yük taşıyan kabloda T_0 kablo kuvvetini bulunuz. Kablonun B mesnetinde yatayla yaptığı açıyı hesaplayınız.





$$W = 30(9.81) = 294 \ \frac{N}{m}$$

$$y = \frac{wx^2}{2T_0}$$

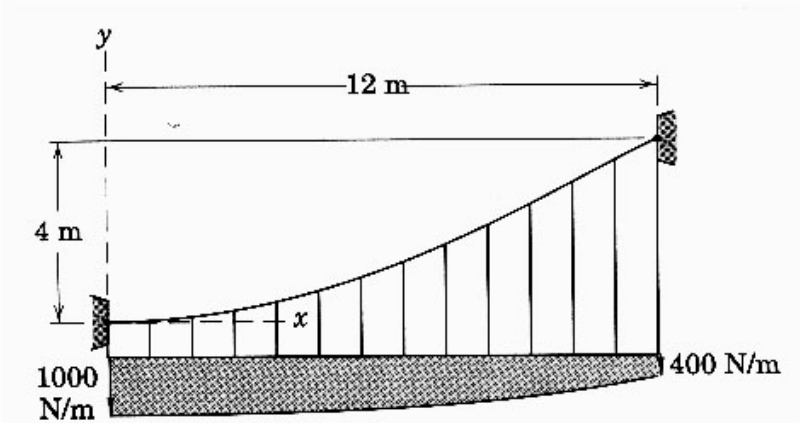
$$T_0 = \frac{wx^2}{2y} = \frac{294\,(70)^2}{2(40)} = 18.03(10^3)\,N \quad \underline{18.03\ kN}$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0}.$$

$$B,\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{294(70)}{18\,030}\right) = \underline{48.8^\circ}$$

Problem 5/143

Kütlesi ihmal edilebilen kablo şekilde görüldüğü gibi iki noktadan tespit edilmiştir. Kablonun bağlandığı alt mesnette kablo teğeti yatay olacak kadar bir kablo kuvveti oluşmuştur. Kabo şiddeti x=0 da 1000 N/m den başlayarak, x^2 ile orantılı olarak azalmaktadır. Kablonun aldığı formu, y = y(x), bulunuz.



$$w = 1000 - kx^2: \quad 400 = 1000 - k(12)^2$$

$$k = 4.17 \text{ N/m}^3 \quad \frac{25}{6} \text{ N/m}^3, \text{ so } w = 1000 - \frac{25}{6}x^2 \text{ N/m}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{w}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(1000 - \frac{25}{6}x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T_0}\int_0^x \left(1000 - \frac{25}{6}x^2\right)dx = \frac{1}{T_0}\left(1000x - \frac{25}{18}x^3\right)$$

$$y = \frac{1}{T_0}\int_0^x \left(1000x - \frac{25}{18}x^3\right)dx = \frac{1}{T_0}\left(500x^2 - \frac{25}{72}x^4\right)$$

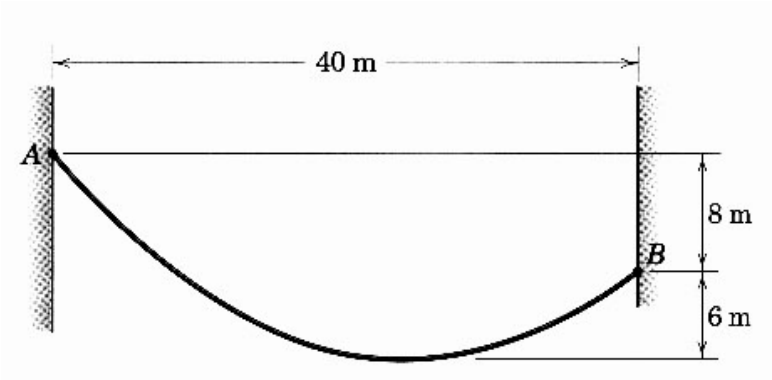
$$x = 12 \text{ m}, \; y = 4 \text{ m},$$

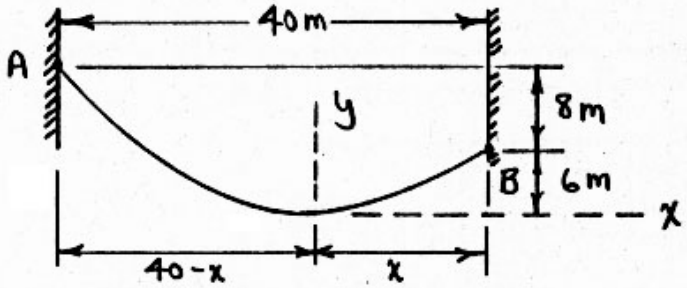
$$4 = \frac{1}{T_0}\left(500 \cdot 12^2 - \frac{25}{72} \cdot 12^4\right), \; T_0 = 16\,200 \text{ N} \qquad 16.20 \text{ kN}$$

$$\underline{y = (309x^2 - 0.214x^4)(10^{-4}) \text{ m}}$$

Problem 5/150

A ve B noktalarından şekildeki gibi tespit edilmiş olan kablonun uzunluğunu hesaplayınız.





$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right)$$

$$B: \quad 6 = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{x}{T_0/\mu} - 1\right) \qquad (1)$$

$$A: \quad 14 = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{x-40}{T_0/\mu} - 1\right) \qquad (2)$$

$$x = 16.07 \text{ m}, \quad \frac{T_0}{\mu} = 22.5 \text{ m}$$

$$s = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{x}{T_0/\mu}$$

$$B: \quad s_B = 22.5 \sinh\frac{16.07}{22.5} = 17.48 \text{ m}$$

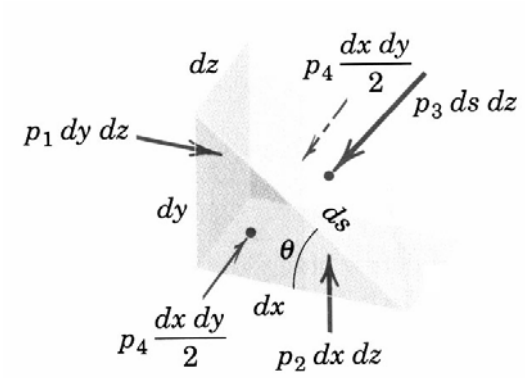
$$A: \quad s_A = 22.5 \sinh\frac{40-16.07}{22.5} = 28.7 \text{ m}$$

$$L = s_A + s_B = 28.7 + 17.48 = \underline{46.2 \text{ m}}$$

Akışkanların Statiği

Bu bölümde, akışkan basıncından kaynaklanan kuvvetlerin etkisindeki cisimlerin dengesi incelenecektir.

<u>Akışkan Basıncı</u>
Pascal kanununa göre, akışkan içinde herhangi bir noktadaki basınç her doğrultuda aynı değerdedir. Bu, aşağıdaki elemanın dengesinden kanıtlanabilir.



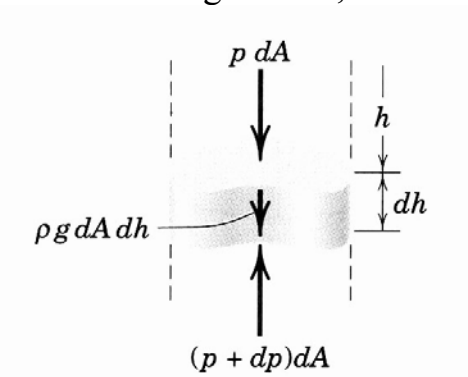
Elemanın yüzlerine etki eden basınç p_1, p_2, p_3, ve p_4 olsun. Bu durumda,

$$p_1\,dy\,dz = p_3\,ds\,dz\,\sin\theta \qquad p_2\,dx\,dz = p_3\,ds\,dz\,\cos\theta$$

ds.sinθ = dy ve ds.cosθ = dx olduğuna göre,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

bulunur.
Elemanın 90 derece döndürülmesi durumunda, diğer yüze etki eden basıncın da eşit olduğu görülür.
dh kalınlığındaki elemanın kuvvet dengesinden,



$$p\,dA + \rho g\,dA\,dh - (p + dp)\,dA = 0$$

$$dp = \rho g\,dh$$

Yukarıdaki ifadenin integrasyonundan,

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

bulunur. Burada p_0 değeri, h = 0 daki akışkan yüzeyinin basıncıdır (atmosfer basıncı).

Basınç ölçüm cihazları, atmosfer basıncından değişimi ölçtüğü için, h derinliğindeki ölçüm basıncı,

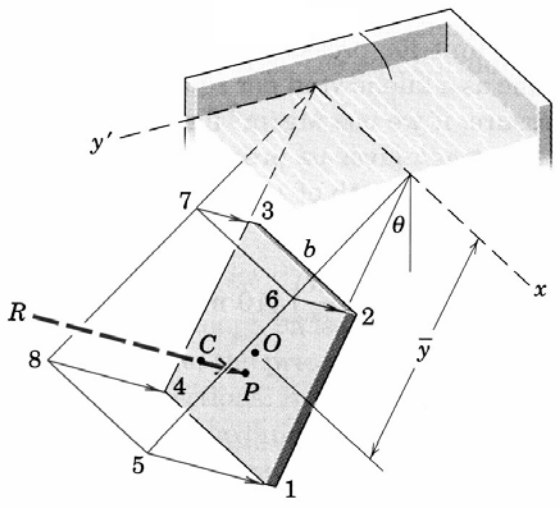
$$p = \rho g h$$

olacaktır.

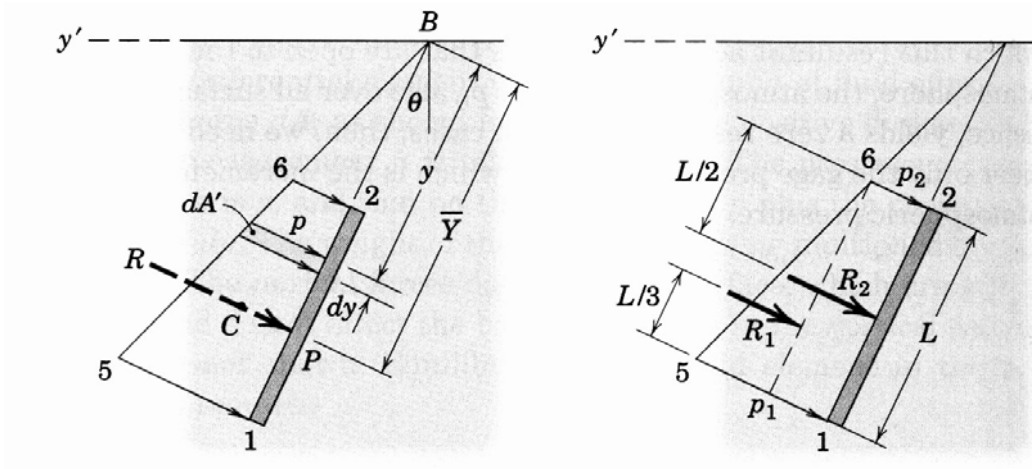
Basınç için en fazla kullanılan SI birimi kilopascal (kPa) dır.

<u>Su İçine Daldırılmış Dikdörtgen Levha</u>

Su içine daldırılmış dikdörtgen levha düşey ile θ açısı yapsın ve su yüzeyi x –y' düzlemi olsun.
2 noktasına etki eden basınç, ρ.g ile 2 noktasının su yüzeyinden derinliğinin çarpımına eşittir (6-2 vektörü). b kenarı boyunca (su yüzeyine paralel 2-3 doğrultusu) bütün noktalardaki basınç aynıdır. Benzer şekilde, 1-4 doğrultusundaki noktalardaki basınçlar aynı ve ρ.g ile 1 noktasının su yüzeyinden derinliğinin çarpımına eşittir (5-1 vektörü).



Dikdörtgen üzerine etki eden basıncın oluşturduğu bileşke kuvvet R dir ve *basınç merkezi* denen bir noktaya etki eder.



1-2 kenarı boyunca basınç değişimi trapezoid şeklindedir.

Levhanın üst kenarına paralel, dy kalınlığındaki bir alan elemanına etki eden kuvvet,

$$dR = p.dA = p.b.dy$$

Ancak p.dy şekildeki dA' alanına eşittir. Dolayısıyla yüzeye etki eden bileşke kuvvet,

$$R = b\int dA' = bA'$$

Buradaki A' alanı, levha kenarı boyunca basınç değişimini tanımlayan trapezoidin alanıdır.

$P_{ort.} = (p_1 + p_2) / 2$ olduğu düşünülürse,

$$R = p_{av}A = \rho g\bar{h}A$$

Burada,

$$\bar{h} = \bar{y}.\cos\theta$$

dir.

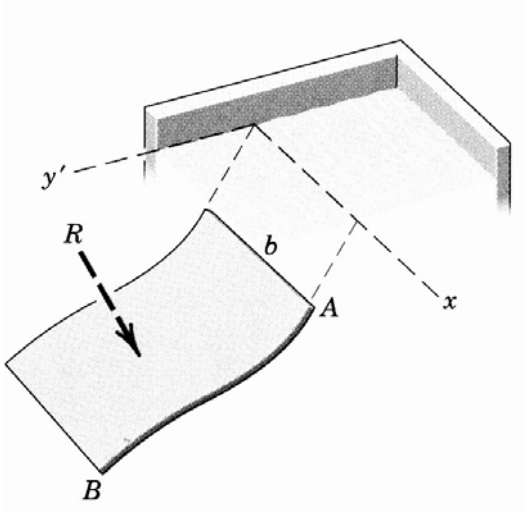
R bileşke kuvvetinin etki ettiği konumu belirlemek için, akışkan yüzeyindeki B noktasına göre moment alarak Varignon teoremi uygulanırsa,

$$\overline{Y} = \frac{\int y\, dA'}{\int dA'}$$

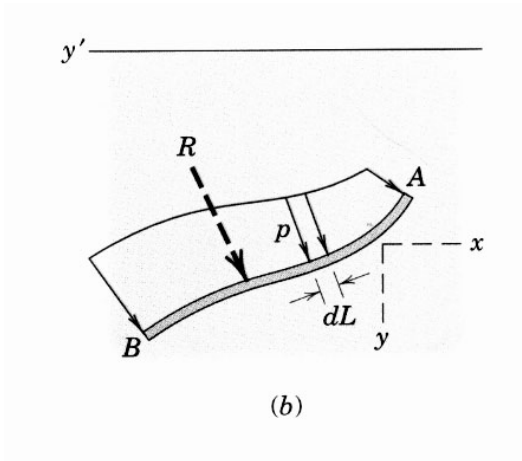
bulunur.

<u>Silindirik Yüzeylere Etki Eden Hidrostatik Basınç</u>

Sıvı içine daldırılmış eğrisel yüzeylere etki eden basınç kuvvetlerinin hesabı düzlem levhalara etki eden kuvvetlerin hesabından daha değişik ve zordur.



Şekilde böyle bir eğrisel yüzey elemanı görülmektedir. Elemanın düşey kesitleri hep AB eğrisi formundadır ve aynı basınç değişiminin etkisindedir. Düşey kesit aşağıdaki şekilde görülmektedir.

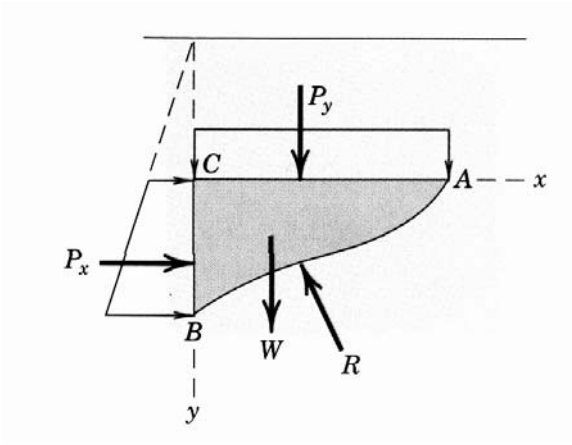


R bileşke kuvvetinin doğrultusu devamlı değişeceğinden, x ve y bileşenlerinin integrasyonu uygun olacaktır.

$$R_x = b\int (p\ dL)_x = b\int p\ dy \quad \text{and} \quad R_y = b\int (p\ dL)_y = b\int p\ dx$$

R nin etki ettiği konum için moment denge denklemi gerekecektir.

R nin bulunması için daha basit bir başka yol, yüzey üzerindeki ABC su blokunun dengesinin incelenmesidir.

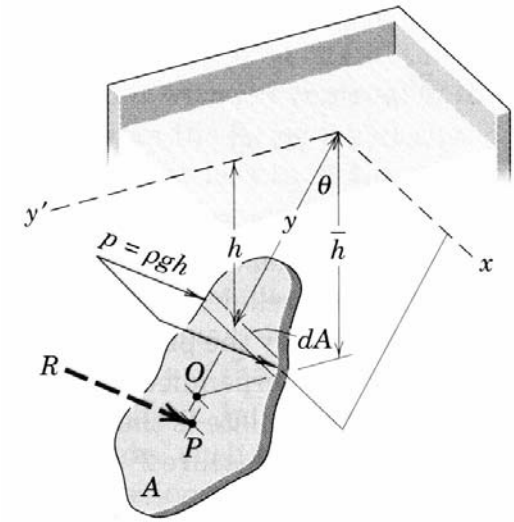


<u>Herhangi bir Geometrideki Yüzeye Etki Eden Hidrostatik Basınç</u>

Cismin yüzeyi düşey ile θ açısı yapsın. Şekilden, dR = p.dA = ρg.dA olacağında, bileşke kuvvet

$$R = \int dR = \int p\ dA = \rho g \int h\ dA$$

şeklindedir.



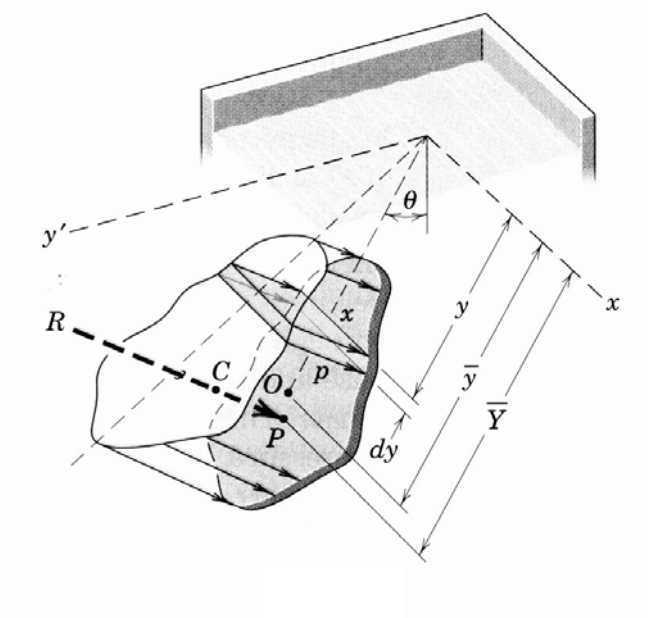
$$\bar{h}A = \int h dA$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\boxed{R = \rho g \bar{h} A}$$

bulunur.

R bileşke kuvveti, ayrıca şekildeki V' hacmi ile de tanımlanabilir.



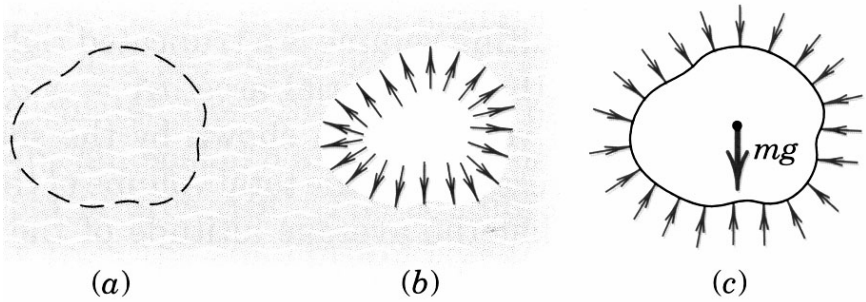
$$R = \int dR = \int p\, dA = \int \rho g h x\, dy$$

Varignon teoremi kullanılarak,

$$R\bar{Y} = \int y\, dR \qquad \bar{Y} = \frac{\int y(px\, dy)}{\int px\, dy}$$

yazılır. Bu değer, R bileşke kuvvetinin geçtiği konumu tanımlar.

<u>Kaldırma Kuvveti (Buoyancy)</u>
Archimedes Prensibine göre, bir akışkan içine daldırılmış bir cisme, cismin hacmi kadar akışkan ağırlığına eşit bir ***kaldırma kuvveti (buoyancy)*** etki eder.



$$F = \rho g V$$

Kaldırma kuvvetinin sonucu olarak, önemli bir nokta, akışkan içine daldırılmış olan cismin stabilitesidir.

Aşağıdaki su içinde bulunan gemide, B noktası geminin akışkan içindeki bölümünün kütle merkezi (kaldırma merkezi), G ise cismin bütününün kütle merkezidir.

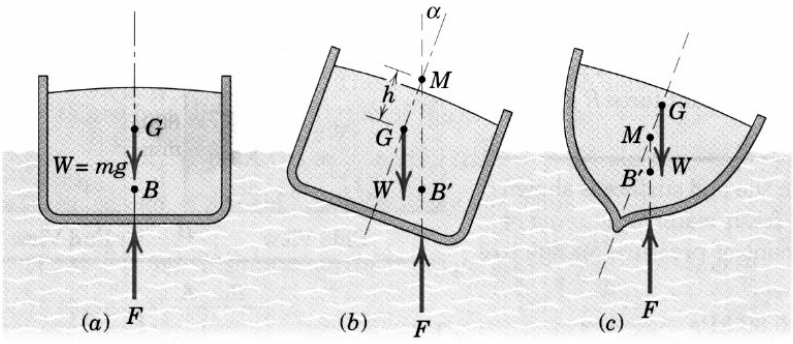
Kaldırma kuvveti F, B kaldırma merkezinden geçer, cismin W ağırlığına eşit ve zıt yöndedir.

Geminin bir α açısı kadar yan yatması durumunda, geminin batan kısmının hacmi değişecektir ve kaldırma merkezi B' gibi bir nokta olacaktır.

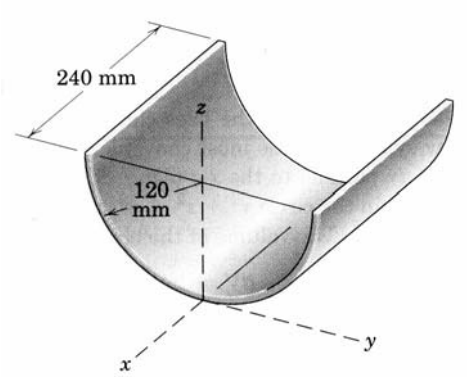
B' den geçen düşey doğrultunun, geminin merkez eksenini kestiği M noktasına Metasenter (metacenter) adı verilir. M ile G arasındaki mesafe ***metasentric yükseklik*** olarak adlandırılır.

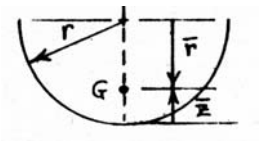
M noktası G nin üstünde ise, şekilden de görüleceği gibi oluşan kuvvet çifti, gemiyi düzeltecek yöndedir.

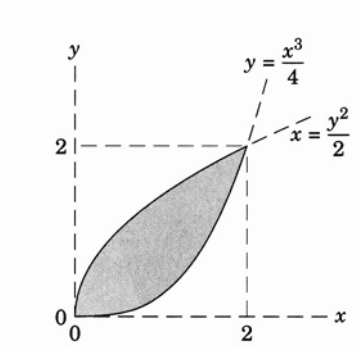
M noktası G nin altında ise, oluşan kuvvet çifti gemiyi daha fazla yana yatıracak yöndedir ve geminin stabilitesi bozulmuş demektir.

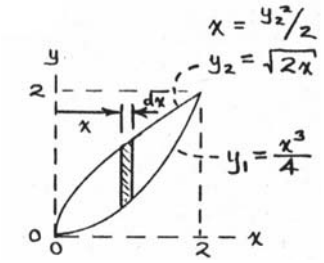


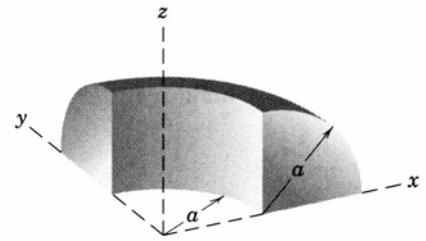
UYGULAMA PROBLEMLERİ

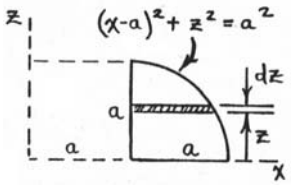











z
(x-a)² + z² = a²
dz
a
z
a
a
x